Analyse von Endzuständen der Antiproton–Proton Annihilation im Fluge

DISSERTATION
zur
Erlangung des Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“
der Fakultät für Physik und Astronomie
an der Ruhr-Universität Bochum

von
Thomas F. Degener

aus
Essen

Bochum 1999

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Analyse von Endzuständen der Antiproton–Proton Annihilation im Fluge

Dissertation zur Erlangung des Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“
der Fakultät für Physik und Astronomie
an der Ruhr-Universität Bochum

vorgelegt von **Thomas F. Degener**
geb. in Essen

Bochum, im Januar 1999

1. Gutachter : Prof. Dr. H.Koch (Inst.f. Experimentalphysik I, RUB)
2. Gutachter : HD Dr. K. Peters (Inst.f. Experimentalphysik I, RUB)
Tag der Disputation :

Für Tara Catharina ...

Abstract

Antiproton–proton annihilation has been studied with the Crystal Barrel detector. The reaction $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV}/c)\,p \rightarrow \eta\eta\pi^0$ has been reanalyzed with a full description of the production and the decay of the $\bar{p}p$–initial states, that could not be realized in an earlier analysis. The isovector resonance $a_2(1650)$ has been confirmed and the spin of the isoscalar $f_0(2150)$ has been determined to be zero. In addition a new resonance $f_2(1980)$ with spin two decaying into $\eta\eta$ is needed to describe the data. The mass and the width are $1982\,\mathrm{MeV}/c^2$ and $458\,\mathrm{MeV}/c^2$, respectively.
An analysis of the reaction $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV}/c)\,p \rightarrow K^+K^-\pi^0$ is presented. The description of the data required, apart from well known mesons, a resonance with spin two decaying into K^+K^-. The isospin of this resonance can not be determined in this specific reaction, but its mass of $1670\,\mathrm{MeV}/c^2$ and its width of $258\,\mathrm{MeV}/c^2$ is compatible with the $a_2(1650)$ seen in the $\eta\eta\pi^0$–final state.
For the above analyses a new type of program written in C++ has been developed, which allows in an easy way a partial wave analysis of complicated multi–body final states as occuring in today's particle physics experiments.

Inhaltsverzeichnis

Abstract **5**

Inhaltsverzeichnis **7**

1 Einleitung **1**
1.1 Quantenchromodynamik . . . 2
1.2 Hadronen - stark gebundene Zustände . . . 4
1.3 Mesonenspektroskopie – Motivation dieser Arbeit . . . 5
1.3.1 Spektrum leichter Mesonen . . . 5
1.3.2 Exotische Teilchen . . . 8
1.3.3 Reaktionen zur Produktion von Mesonen und Exoten . . . 9

2 Aufbau des Experiments **11**
2.1 Erzeugung der Antiprotonen . . . 11
2.2 Crystal Barrel Detektorsystem . . . 13
2.2.1 Wasserstofftarget . . . 13
2.2.2 Silizium–Vertexzähler . . . 14
2.2.3 Jet–Driftkammer . . . 14
2.2.4 $CsI(Tl)$–Kalorimeter . . . 15
2.2.5 Triggersystem . . . 16

3 Präparation der Datensätze **19**
3.1 Rekonstruktion von geladenen Teilchen . . . 20
3.1.1 Pion–Kaon–Separation . . . 21
3.2 Rekonstruktion von Photonen . . . 24
3.2.1 Separation von Photonen und Schauerfluktuationen . . . 26
3.3 Präparation der Endzustände mit sechs Photonen . . . 29
3.3.1 Präparation der Reaktionen $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV/}c)\,p \to \eta\eta\pi^0 \to 6\gamma$ . . . 30
3.3.2 Präparation der Reaktionen $\bar{p}\,(600\,\mathrm{MeV/}c)\,p \to \pi^0\pi^0\pi^0 \to 6\gamma$ . . . 32
3.4 Präparation der Reaktionen $\bar{p}p \to (C^+C^-)^{n_c}\gamma^{n_\gamma}$ . . . 33
3.4.1 $\bar{p}(1940\,\mathrm{MeV/}c)p \to C^+C^-2\gamma$ . . . 35
3.4.2 Präparation der Reaktionen $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV/}c)\,p \to K^+K^-\pi^0 \to K^+K^-2\gamma$ 37

4 Formalismus **41**
4.1 Konstruktion der Zustände . . . 41
4.1.1 Einteilchenzustände . . . 42
4.1.2 Zweiteilchenzustände . . . 44
4.2 Zweikörperzerfälle . . . 47
4.2.1 Erhaltung des Drehimpulses . . . 47

4.2.2 Erhaltung der Parität 49
4.2.3 Erhaltung additiver Quantenzahlen - Ladungserhaltung 52
4.2.4 Erhaltung des Isospins – Ladungsunabhängigkeit 53
4.2.5 Erhaltung der C– und G–Parität 55
4.3 Anfangszustände 63
4.3.1 Produktion der Anfangszustände 63
4.3.2 Fermion–Antifermion–Anfangszustände 64
4.3.3 Proton–Antiproton–Anfangszustände 65
4.4 Dynamik der partiellen Amplituden 66
4.4.1 S–, T– und K–Matrix 66
4.4.2 F– und P–Vektor Ansatz 68
4.4.3 Amplitudenverhalten an der Schwelle 69
4.5 Sequentielle Zweikörperzerfälle 70
4.6 Interferenzen 71
4.6.1 Behandlung der Endzustände 71
4.6.2 Behandlung der Anfangszustände 71
4.7 Gewichtsfunktion (Wirkungsquerschnitt) 72
4.7.1 Unabhängige Observable 73
4.7.2 Anzahl der zu bestimmenden Parameter 75
4.8 Maximum–Likelihood–Methode 78

5 Analyse der Datensätze **81**
5.1 $\bar{p}\,(600\,\text{MeV/}c)\,p \to \pi^0\pi^0\pi^0 \to 6\gamma$ 81
5.2 $\bar{p}\,(1940\,\text{MeV/}c)\,p \to \eta\eta\pi^0 \to 6\gamma$ 85
5.3 $\bar{p}\,(1940\,\text{MeV/}c)\,p \to K^+K^-\pi^0 \to K^+K^-2\gamma$ 93
5.3.1 Untersuchung der 1500 MeV/c^2–K^+K^-–Massenregion 93
5.3.2 Untersuchung der 1700 MeV/c^2–K^+K^-–Massenregion 94
5.3.3 Gesamte K^+K^-–Massenregion 95

6 Zusammenfassung und Diskussion **105**

A TARA – das Analyseprogram **107**
A.1 Benutzereingaben 107
A.1.1 Teilchendefinitionen – *Teilchentabelle* 108
A.1.2 Hypothese – *Steuerungsdatei* 108
A.1.3 Strategie 117
A.2 Ausführung 121
A.3 Ausgabe 121

B Implementierung **123**
B.1 Symbolische Repräsentation 125
B.2 Steuerung 125
B.3 Berechnung von Funktionen 131
B.4 Minimierung und Visualisierung 134
B.5 Alphabetische Liste aller Klassen 136

C Formelsammlung 149
C.1 Polynome . . . 149
C.1.1 Legendre–Polynome P_n . . . 149
C.1.2 Jacobi–Polynome $P_n^{(a,b)}$ . . . 149
C.2 Kugelflächenfunktionen Y_m^l . . . 150
C.2.1 Zugeordnete Legendrefunktionen P_m^l . . . 150
C.3 Wignersche D–Funktionen $D^j_{m_1,m_2}$ . . . 151
C.4 Clebsch–Gordan–Koeffizienten $(j_1m_1j_2m_2|jm)$ . . . 152
C.5 Lorentz–Transformation $\tilde{L}(\tilde{p})$ . . . 153
C.6 Invariante Masse m . . . 153
C.7 Aufbruchimpulse p_s, p_s^0 . . . 154
C.8 Zerfallswinkel Ω_ι^σ . . . 154
C.9 Blatt–Weisskopf–Faktoren . . . 156
C.9.1 Sphärische Besselfunktionen $\left|h_L^{(1)}\right|^2$ . . . 156
C.9.2 Definition der Funktionen $D_L(p)$ . . . 156
C.9.3 Definition der Funktionen $B_L(p,p_0)$ . . . 157
C.10 Parametrisierung der dynamischen Funktionen Δ . . . 157
C.10.1 Einfache Breit–Wigner–Form $\Delta(m_0,m,\Gamma_0)$ . . . 157
C.10.2 Breit–Wigner–Form $\Delta_L(m_0,m,\Gamma_0,p)$ . . . 157
C.10.3 Breit–Wigner–Form aus dem F-Vektor Ansatz $\Delta_L(m_0,m,\Gamma_0,p,p_0)$ 158
C.10.4 Andere Breit–Wigner–Formen $\Delta_L(m_0,m,\Gamma_0,p,p_0)$ . . . 158

Abbildungsverzeichnis 159

Tabellenverzeichnis 161

Literaturverzeichnis 163

Glossar 167

Danksagung 171

Lebenslauf 173

Kapitel 1

Einleitung

Ein Hauptziel der Teilchenphysik ist es, die Grundbausteine der Materie zu finden und die Kräfte zwischen ihnen zu beschreiben. Im Rahmen des Standardmodells lassen sich alle Teilchen aus nur zwei Sorten elementarer Fermionen – den Quarks und den Leptonen – aufbauen. Tabelle 1.1 zeigt die nach ansteigender Masse geordneten Paare der drei Generationen der Quarks und Leptonen. Die Wechselwirkung zwischen den elementaren Fermionen wird durch den Austausch virtueller Teilchen – den Eichbosonen – vermittelt. In der Teilchenphysik werden nur drei Wechselwirkungen berücksichtigt[1]: die starke, die schwache und die elektromagnetische Wechselwirkung. Jede der drei Wechselwirkungen wird im Standardmodell durch eine Eichtheorie beschrieben. Weinberg und Salam

[1] Die Gravitation kann gegenüber den anderen Wechselwirkungen vernachlässigt werden.

		Quarks		**Leptonen**	
1.Generation		u up	d down	e^- Elektron	ν_e Elektron-Neutrino
2.Generation		s strange	c charm	μ^- Myon	ν_μ Myon-Neutrino
3.Generation		b bottom	t top	τ^- Tau	ν_τ Tau-Neutrino
Farbladung		rot,grün,blau		farblos	
Wechselwirkung und Eichbosonen					
starke Wechselwirkung	g 8 Gluonen	ja	ja	nein	nein
elektromagnetische Wechselwirkung	γ Photon	ja	ja	ja	nein
schwache Wechselwirkung	W^+, W^-, Z^0	ja	ja	ja	ja

Tabelle 1.1: **Grundbausteine der Materie.**
Zu jedem Quark und jedem Lepton existiert jeweils ein entsprechendes Antiteilchen. Werden die Teilchen nach der Farbe unterschieden, dann gibt es $2 \times 3 \times 6 = 36$ *Quarks,* $2 \times 2 \times 3 = 12$ *Leptonen und* 12 *Eichbosonen, welche die Wechselwirkungen vermitteln; also insgesamt* 60 *Teilchen, aus denen sich alle anderen Teilchen zusammensetzen. Sowohl Leptonen als auch Quarks sind Fermionen mit Spin* 1/2.

gelang es die Theorien der elektromagnetischen (QED[2]) und der schwachen Wechselwirkung in der elektroschwachen Theorie zu vereinigen. Die Eigenschaften der Kräfte werden den Eichbosonen zugeschrieben. So erklärt die Masselosigkeit des Photons die unendliche Reichweite der elektromagnetischen Kraft, und die großen Massen der W^+–, W^-– und Z^0–Bosonen erklären die sehr kurze Reichweite der schwachen Wechselwirkung. Alle Leptonen und auch die vier Eichbosonen (γ, W^+, W^-, Z^0) sind als einzelne, freie Teilchen in der Natur beobachtet worden. Im Gegensatz dazu gelang es noch nicht, einzelne freie Quarks oder Gluonen zu beobachten. Um diesem Rechnung zu tragen, wird angenommen, daß die Quarks in gebundenen Zuständen eingeschlossen sind (*Confinement*).

1.1 Quantenchromodynamik

Die Theorie der starken Wechselwirkung – die Quantenchromodynamik (QCD) – erklärt das *Confinement* durch die Einführung dreier Farbladungen und das Postulat, daß jedes beobachtbare physikalische System farblos ist. Quarks können nicht als freie Teilchen beobachtet werden, da Quarks Farbladung tragen. Die zugrundeliegende Symmetrie ist die $SU(3)_{\text{Color}}$. Weil die QCD eine nicht–abelsche Theorie ist, tragen auch die Mittlerteilchen der starken Wechselwirkung – die Gluonen – Farbladung. Dies führt dazu, daß die Eichbosonen selbst miteinander wechselwirken. Daher scheint weder eine exakte noch eine störungstheoretische Lösung der Gleichungen der QCD zur Beschreibung gebundener hadronischer Zustände bei niedrigen Energien möglich. Aus diesem Grund bedient man sich phänomenologischer Modelle (MIT–Bag–Modell, Potentialmodelle) oder numerischer Methoden, wie der Diskretisierung des Raum–Zeit–Kontinuums (Gittereichtheorie). Alle diese Modelle tragen dem Einschluß der Quarks in irgendeiner Form Rechnung. Ihnen gemeinsam ist jedoch, daß sie, neben den gewöhnlichen Baryonen und Mesonen, gebundene Zustände aus mehreren Quarks und Gluonen vorhersagen oder zumindest nicht ausschließen.

Quarks werden entsprechend der fundamentalen Darstellung **3** der $SU(3)_{\text{Color}}$ transformiert, Gluonen entsprechend der fundamentalen Darstellung **8** und Antiquarks entsprechend der konjugiert komplexen Darstellung $\bar{\mathbf{3}}$. Daher sind zum Beispiel für die folgenden Systeme aus Quarks und Gluonen Color–Singuletts (farblose Zustände) möglich:

- Mesonen ($q\bar{q}$)
  Die einfachsten Color–Singulett Systeme sind die Mesonen, die aus Quark und Antiquark bestehen: $q \otimes \bar{q} = 8 \oplus 1$.
  Das Color–Oktett kann wegen des Postulates der Farblosigkeit in der Natur nicht realisiert sein.

- Baryonen (qqq)
  Für ein System aus drei Quarks existiert ebenfalls nur ein Color–Singulett:
  $q \otimes q \otimes q = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$

- Gluebälle (gg, $ggg \cdots$)
  Da sich Gluonen als Oktett–Zustände transformieren, ist das einfachste Color–Singulett System, das in der Natur realisiert sein könnte, ein System aus zwei Gluonen:
  $g \otimes g = 8 \otimes 8 = 27 \oplus 10 \oplus \bar{10} \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$
  Für mehr als zwei Gluonen ($ggg \cdots$) sind natürlich auch Color–Singuletts möglich.

[2] QED: Quantenelektrodynamik

- Hybride ($q\bar{q}g$, $qqqg\cdots$)
  Zustände, die ein (oder mehrere) zusätzliche konstituierende Gluonen[3](im Unterschied zu den virtuellen Gluonen, die den Zustand binden) besitzen, könnten ebenfalls in der Natur realisiert sein. So gilt etwa:
  $q \otimes \bar{q} \otimes g = (8 \oplus 1) \otimes 8 = 27 \oplus 10 \oplus \bar{1}0 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$

- Multiquarks ($q\bar{q}q\bar{q}$, $qqqqqq\cdots$)
  Desgleichen sind Zustände mit vielen Quarks oder Quark–Antiquark Paaren denkbar, zum Beispiel: $q^2\bar{q}^2$. Allgemeiner formuliert, könnten $(q^3)^m(q\bar{q})^n$–Systeme mit $m+n>1$ existieren. Natürlich könnten diese Systeme noch zusätzliche konstituierende Gluonen besitzen.

Angesichts der extrem kurzen Lebensdauern vieler gewöhnlicher Mesonen und Baryonen fällt es schwer an die Existenz von Teilchen, die aus mehr als sechs Quarks (sogenannten Baryonia) oder mehr als zwei Quark–Antiquark Paaren (sogenannten Di–Mesonen) bestehen, zu glauben. Umgekehrt stellt sich die Frage nach der Vollständigkeit der Theorie, wenn nicht einmal die einfachsten exotischen Teilchen experimentell beobachtet werden können.

	Quarks						**Leptonen**					
Quantenzahl	d	u	s	c	b	t	e^-	ν_e	μ^-	ν_μ	τ^-	ν_τ
Q - elektrische Ladung	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	1	0	1	0
B – Baryonenzahl	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0	0
„leichte“ Quarks ohne Flavor (Upness, Downness)												
I_3 (Isospin)	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
„schwere“ Quarks (*Flavored Channels*)												
q_S – Strangeness	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
q_C – Charmness	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
q_B – Bottomness	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
q_T – Topness	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Leptonenzahlen												
q_{L_e} – Elektron	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
q_{L_μ} – Muon	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
q_{L_τ} – Tau	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Tabelle 1.2: **Additive Quantenzahlen der Quarks und Leptonen.** *Die Quantenzahlen der jeweiligen Antiteilchen haben das entgegengesetzte Vorzeichen. Daß anstelle von Upness und Downness die dritten Komponenten des Isospins benutzt werden, ist historisch bedingt und beruht auf der Massenentartung des u- und des d-Quarks.*

1.2 Hadronen - stark gebundene Zustände

Die Eigenschaften eines gebundenen hadronischen (leptonischen) Zustandes werden von seiner inneren Struktur bestimmt. Jedem der Grundbausteine der Materie (Tab. 1.1) wird ein Satz von additiven, „ladungsartigen“ Quantenzahlen zugeordnet. Diese Quantenzahlen sind die elektrische Ladung Q, die dritte Komponente des Isospins I_3 (siehe Kapitel 4.2.4), die Baryonenzahl B, die Quarkflavors – Strangeness q_S, Charm q_C, Bottomness q_B, Topness q_T und die Leptonenzahlen – elektrische q_{L_e}, myonische q_{L_μ} und tauonische q_{L_τ} Leptonzahl. Wie die Bezeichnung „additiv“ bereits andeutet, ergeben sich die „Netto-Ladungen“ eines gebundenen Zustandes einfach durch Addition jeder einzelnen Quantenzahl der Konstituenten. Tabelle 1.2 definiert diese Quantenzahlen für Quarks und Leptonen. In Reaktionen der starken (Gluonenaustausch) und der elektromagnetischen (Photonenaustausch) Wechselwirkung bleiben alle Ladungen erhalten (siehe auch Kapitel 4.2.3). Unter anderem bedeutet dies, daß beide Wechselwirkungen den Quarkflavor nicht ändern. Die schwache Wechselwirkung kann hingegen durch den Austausch von W–Bosonen den Quarkflavor ändern. In schwachen Zerfällen bleiben im Allgemeinen nur die elektrische Ladung und die Leptonenzahlen erhalten. Auf die schwache Wechselwirkung wird in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen, da diese in der Spektroskopie leichter Hadronen eine untergeordnete Rolle spielt.
Für die Einordnung aller leichter Baryonen reicht die Betrachtung von drei unterschiedlichen Quarksorten aus. Dies sind die „leichten“ Quarks u und d sowie das *Strange*–Quark s. Die zugrundeliegende Symmetrie ist die $SU(3)_{\text{Flavor}}$. Die daraus resultierende Nomenklatur ist in Tabelle 1.4 angegeben.
Auch die Mesonen können gemäß ihrer additiven Quantenzahlen in Gruppen eingeteilt werden. Tabelle 1.3 zeigt die Einordnung aller bisher experimentell nachgewiesenen Meso-

[3] Konstituierende Gluonen werden auch Valenzgluonen genannt.

Gruppe	spez. Name	Quarks	I	q_S	q_C	q_B
Leichte M. ohne Flavor	$\dagger(\pi,\ \eta,\ \cdots)$	$u\bar{d},\ u\bar{u},\ d\bar{d},\ s\bar{s}$	0,1	0	0	0
Strange–M.	K–Mesonen	$\bar{s}u,\ \bar{s}d$	$\frac{1}{2}$	±1	0	0
$c\bar{c}$–Mesonen	ψ, χ_c–Mesonen	$c\bar{c}$	0	0	0	0
Charme–Mesonen	D-Mesonen	$c\bar{u},\ c\bar{d}$	$\frac{1}{2}$	0	±1	0
Charme–Strange–M.	D_s–Mesonen	$c\bar{s}$	0	±1	±1	0
$b\bar{b}$–Mesonen	Υ, χ_b–Mesonen	$b\bar{b}$	0	0	0	0
Bottom–M.	B–Mesonen	$\bar{b}u,\ \bar{b}d$	$\frac{1}{2}$	0	0	±1
Bottom–Strange–M.	B_s-Mesonen	$\bar{b}\bar{s}$	0	±1	0	±1

Tabelle 1.3: **Einteilung der Mesonen nach additiven Quantenzahlen.**
Alle Mesonen sind Bosonen und haben die Baryonenzahl $B = 0$. Die Quarkzusammensetzung der Antiteilchen ergibt sich durch Austausch des „Querstriches“.
† *Auf die Nomenklatur der leichten Mesonen und der Mesonen mit Strangeness wird im nächsten Kapitel eingegangen.*

Name	I	q_S	Quarks
Nukleonen	$\frac{1}{2}$	0	$N^+ = uud$, $N^0 = udd$
Δ-Baryonen	$\frac{3}{2}$	0	$\Delta^{++} = uuu$, $\Delta^+ = uud$, $\Delta^0 = udd$, $\Delta^- = ddd$
Λ-Baryonen	0	-1	$\Lambda^0 = uds$
Σ-Baryonen	1	-1	$\Sigma^+ = uus$, $\Sigma^0 = uds$, $\Sigma^- = dds$
Ξ-Baryonen	$\frac{1}{2}$	-2	$\Xi^0 = uss$, $\Xi^- = dss$
Ω-Baryonen	0	-3	$\Omega^- = sss$

Tabelle 1.4: **Nomenklatur für Baryonen.**
Alle Baryonen sind Fermionen und haben die Baryonenzahl $B = 1$

nen. Diese Arbeit konzentriert sich auf die leichten Mesonen ohne Flavor und die *Strange*–Mesonen, da mit dem vom *LEAR*[4] zur Verfügung gestellten maximalen Antiprotonen–Strahlimpuls von 1940 MeV/c bei einem „Fixedtarget“–Experiment in der Antiproton–Proton–Annihilation nur Energien bis zu 2, 5 GeV im Schwerpunktsystem erreicht werden. Daher können bereits die „leichtesten“ $c\bar{c}$–Mesonen mit einer Masse von ca. 3 GeV/c^2, zum Beispiel das J/ψ und das η_c, nicht erzeugt werden[5].

1.3 Mesonenspektroskopie – Motivation dieser Arbeit

Unter Mesonenspektroskopie wird die vollständige Vermessung aller Eigenschaften der Hadronen mit ganzzahligem Spin verstanden. Diese Eigenschaften sind:

- Masse und Breite (letztere entspricht der Lebensdauer).
- „Drehimpulsartige“ Quantenzahlen:
  Spin J, Isospin I.
- „Multiplikative“ Quantenzahlen:
  Räumliche Parität P, Ladungs–Parität C, G–Parität G.
- „Ladungsartige“ bzw. „additive“ Quantenzahlen:
  Elektrische Ladung Q, dritte Komponente des Isospins I_3, „Netto“-Flavor (q_S, q_C usw.).
- Zerfallsmoden und deren Verzweigungsverhältnisse.

1.3.1 Spektrum leichter Mesonen

Das heute bekannte Spektrum der leichten Mesonen ohne Flavor und der Strange–Mesonen überstreicht einen Massenbereich von etwa 0.1 GeV/c^2–2.5 GeV/c^2. Dies ist das Regime der $SU(3)_{Flavor}$, das heißt der Mesonen, die aus u–, d– und s–Quarks bestehen. Daher lassen sich in diesem Bereich alle Mesonen in Nonetts einteilen, die sich jeweils, analog zur $SU(3)_{Color}$, in ein Flavor–Oktett und ein Flavor–Singulett zerlegen lassen. Eine solche

[4] engl.: *Low Energy Antiproton Ring* – Speicherring für niederenergetische Antiprotonen.

[5] Die D– und die D_s–Mesonen sind zwar leichter, müßten aber in Paaren erzeugt werden, da das $\bar{p}p$–System keine äußere Charmness ($q_C = 0$) besitzt. Dazu werden Energien von über 4 GeV im Schwerpunktsystem benötigt.

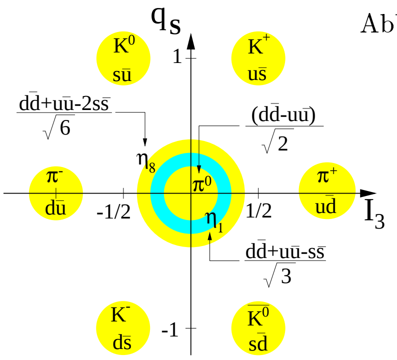

Abbildung 1.1: $SU(3)_{Flavor}$**–Nonett.**
Vereinfacht dargestellt sind die Flavor-Wellenfunktionen und ihre Zuordnung zu experimentell beobachteten Teilchen. Exemplarisch ist das pseudoskalare Nonett ($J^{PC} = 0^{-+}$) gezeigt. Die in der Natur realisierten Zustände η und η' sind Mischungen aus dem $SU(3)_{Flavor}$–Singulett–Zustand η_1 und dem zugehörigen Oktett-Zustand η_8, die sich beide im Ursprung des Diagramms ($I_3 = q_S = 0$) befinden.

Zerlegung zeigt schematisch das Diagramm 1.1. Jedes Nonett besteht aus einem Isovektor π (ρ) auf der I_3–Achse, aus einem Kaon–Quartett K (K^*) und aus zwei Isoskalaren im Ursprung des Diagramms. Ein Isoskalar ist der $SU(3)_{Flavor}$–Singulett–Zustand η_1 und der andere ist der Oktett–Zustand η_8. Letztere sind in der Natur im allgemeinen nicht realisiert. Da beide $SU(3)_{Flavor}$–Zustände gleiche Quantenzahlen haben, können die experimentell beobachteten Zustände η und η' Mischungen aus η_1 und η_8 sein. Diese Mischung läßt sich für das 0^{-+}–Nonett in Abb. 1.1 exemplarisch in der Form

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_8 \cos\Theta_{PS} - \eta_1 \sin\Theta_{PS} \\ \eta' &= \eta_8 \sin\Theta_{PS} + \eta_1 \cos\Theta_{PS} \end{aligned} \tag{1.1}$$

schreiben. Der Parameter Θ_{PS} wird Mischungswinkel genannt und muß experimentell bestimmt werden. Der Index PS steht für Pseudoskalar um anzuzeigen, daß der Mischungswinkel für jedes Nonett anders sein kann.
Die Nomenklatur der leichten Mesonen ist historisch gewachsen und daher nicht immer ganz eindeutig. Im statischen Quarkmodell wird der Spin der Quarks (1/2) berücksichtigt[6].

[6]Die zugrunde liegende Symmetriegruppe ist die $SU(6)_{Flavor+Spin}$ der drei „leichten" Quarks mit Spin ($u\uparrow$, $u\downarrow$, $d\uparrow$, $d\downarrow$, $s\uparrow$, $s\downarrow$).

J^{PC} Nonett	(L,S)	I=1 (C nur für $I_3 = 0$ def.)		I=0		$I = \frac{1}{2}$ (C und G nicht def.)
g^{-+}	(g,0)	π_J	$(G=-1)$	η_J, η'_J	$(G=1)$	K_J $(q_S = \pm 1)$
$(J>0)^{--}$	(g,1)	ρ_J	$(G=1)$	ω_J, ϕ_J	$(G=-1)$	K^*_J $(q_S = \pm 1)$
u^{+-}	(u,0)	b_J	$(G=1)$	h_J, h'_J	$(G=-1)$	K_J $(q_S = \pm 1)$
J^{++}	(u,1)	a_J	$(G=-1)$	f_J, f'_J	$(G=1)$	K_J $(q_S = \pm 1)$
0^{--}, g^{+-}, u^{-+}		**„Exotische" Quantenzahlen**				

Tabelle 1.5: **Nomenklatur für Mesonen aus** $SU(3)_{Flavor}$**–Nonetts.**
In der Tabelle steht g für eine gerade und u für eine ungerade natürliche Zahl einschließlich null. Die Nomenklatur ist insbesondere für die Kaonen uneindeutig. Zudem wird der untere Index J häufig weggelassen. Die Isovektoren und die Kaonen erhalten noch die Ladung als oberen Index. Die beiden neutralen Kaonen werden durch einen Querbalken unterschieden ($q_S = 1$: $\bar{K}_0$).

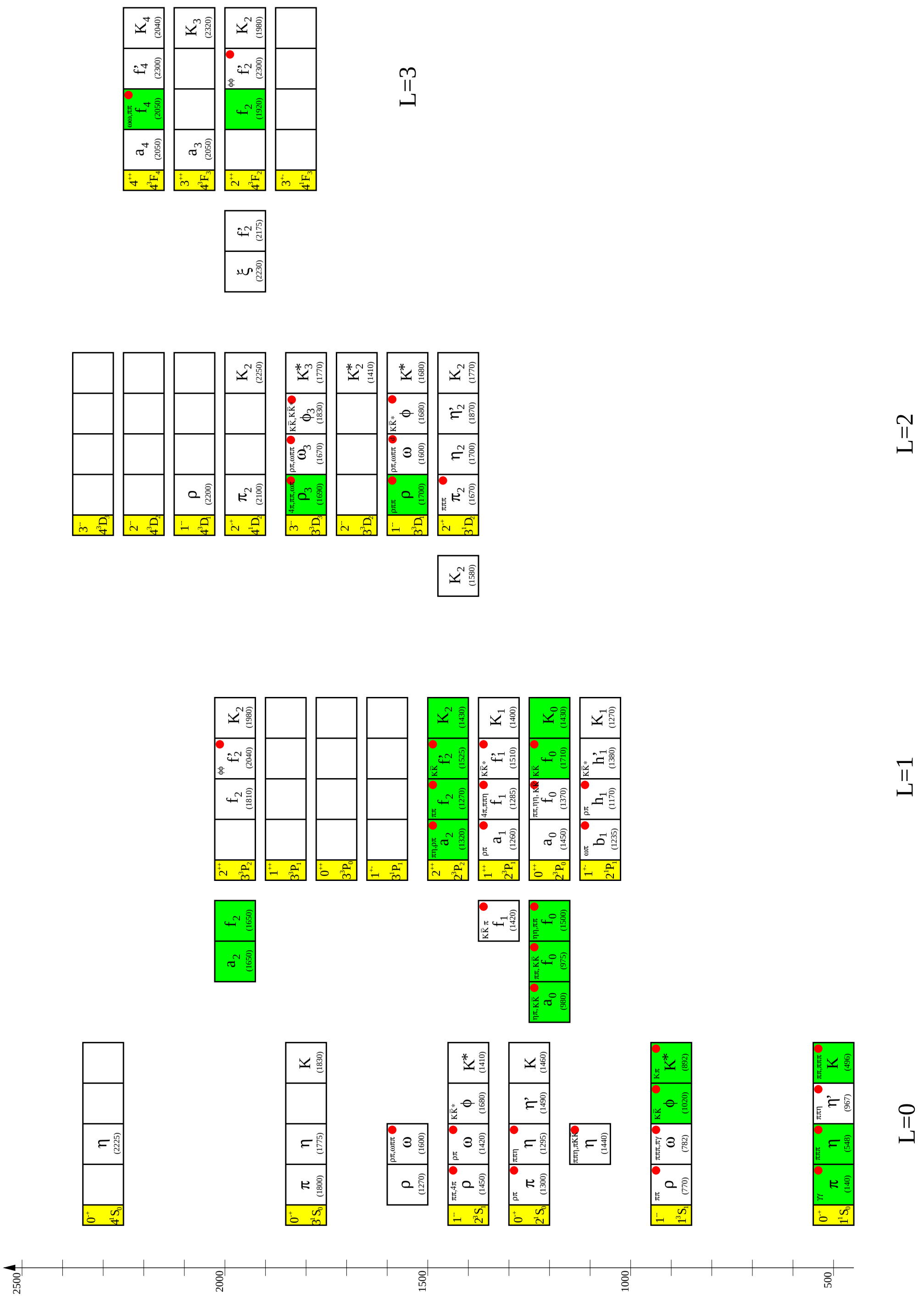

Abbildung 1.2: **Mesonenspektrum.**
Zuordnung nach K. Peters [1]. Teilchen, die in den Analysen dieser Arbeit vorkommen sind dunkelgrau hinterlegt. In den hellgrauen Kästchen sind die Quantenzahlen J^{PC} und die spektroskopischen Bezeichnungen für die Quantenzahlen $n^{2S+1}L_J$ der Nonetts angegeben. n ist die Hauptquantenzahl, S der Gesamtspin und L der relative Bahndrehimpuls des $q\bar{q}$–Paares.

Für ein Quark–Antiquark–Paar ist der Gesamtspin S entweder null oder eins. Das Quark–Antiquark–Paar kann Zustände mit unterschiedlichen relativen Bahndrehimpulsen $L_{\bar{q}q}$ einnehmen. Der Spin J eines Mesons folgt durch gewöhnliche LS-Kopplung[7]. Die Quantenzahlen eines gegebenen Mesons sind dann analog zu den in Kapitel 4.3.2 ausführlich beschriebenen Antifermion–Fermion–Zuständen festgelegt. Allerdings haben nur die beiden Isoskalare und der neutrale Zustand des Isovektors eines Nonetts eine definierte C–Parität (vgl. 4.2.5). Die Mitglieder des Kaonen–Quartetts sind weder C–Paritäts–Eigenzustände noch G–Paritäts–Eigenzustände (vgl. Kapitel 4.2.5). Die darauf aufbauende Nomenklatur ist in Tabelle 1.5 angegeben. Die Nomenklatur ist erst dann eindeutig, wenn auch die Massen der Teilchen mit angegeben werden, da radiale Anregungen der Quark–Antiquark–Paare möglich sind, die sich im statischen Quarkmodell in der Hauptquantenzahl n vom Grundzustand mit $n = 1$ unterscheiden. Eine mögliche Zuordnung der heute bekannten Teilchen im Massenbereich von etwa $0.1\,\mathrm{GeV/}c^2$–$2.5\,\mathrm{GeV/}c^2$ zu $SU(3)_{Flavor}$–Nonetts und deren radialen Anregungen ist in Abbildung 1.2 gezeigt. Nicht alle bekannten Zustände können in dieses Schema eingeordnet werden, da es nicht genügend freie Plätze gibt. Also müssen einige der Zustände eine andere innere Struktur besitzen.

1.3.2 Exotische Teilchen

Die Bezeichnung „exotisches Teilchen“ suggeriert ein völlig neuartiges und unbekanntes, auch von der Theorie noch nicht erfaßtes Teilchen. In diesem Sinne war in den fünfziger Jahren die Entdeckung der Teilchen mit Strangeness etwas völlig neues, was sich auch in dem Namen „Seltsamkeit“ als neue Quantenzahl niedergeschlagen hat. Heute ist die Situation eher umgekehrt. Ausgehend von der Tatsache, daß alle Grundbausteine der Materie (Tab. 1.1) entdeckt sind und daß die QCD alle stark wechselwirkenden Systeme beschreibt, stellt sich eher die Frage, warum erst so wenige Kandidaten für sogenannte exotische Teilchen entdeckt worden sind. Was also sind exotische Teilchen ? Zur Zeit muß die Antwort noch lauten: Alle Teilchen, die weder in das „gewöhnliche“ qqq–Baryonenspektrum, noch in das „gewöhnliche“ $q\bar{q}$–Mesonenspektrum eingeordnet werden können, sind exotisch. Im mesonischen Sektor lassen sich solche Exoten nach ihren meßbaren Eigenschaften in drei Arten unterteilen:

- Exoten 1. Art
  Exotische Mesonen der 1. Art tragen additive, „ladungsartige“ Quantenzahlen, die nicht von $q\bar{q}$–Paaren erzeugt werden können, das heißt der Betrag der elektrischen Ladung ist größer als Eins ($|Q| > 1$, Beispiel wäre ein Meson, das in $\pi^+\pi^+$ zerfällt), oder der Isospin beziehungsweise der Betrag eines schweren Quarkflavours (q_S, q_C, q_B, q_T) ist größer als Eins. Ein solches Teilchen ist eindeutig als Exote zu klassifizieren, und es sollte relativ einfach zu identifizieren sein. Bisher wurde ein solcher Exote noch nicht nachgewiesen.

- Exoten 2. Art
  Hierbei handelt es sich um Exoten, die bestimmte Kombinationen der Quantenzahlen J^{PC} besitzen, die nicht von einem einfachen $q\bar{q}$–Meson angenommen werden können. Solche Kombinationen sind, wie in Tabelle 1.5 gezeigt, 0^{--}, gerade^{+-} und ungerade^{-+}, also 0^{--}, 0^{+-}, 1^{-+} und so weiter. Die in der Einleitung (Abschnitt 1.1) angesprochenen, QCD–erlaubten „Exoten“ können diese Quantenzahlen-Kombinationen besitzen. So sind für $q\bar{q}g$–Hybride, „Diquarkonia“ ($q\bar{q}q\bar{q}$) und für

[7] Siehe kanonische Zweiteilchenzustände mit Gesamtspin J in Kapitel 4.1.2.2.

Gluonenbälle aus drei konstituierenden Gluonen (ggg) alle J^{PC}-Kombinationen erlaubt.
Auch für Exoten der 2.Art ist zumindest die Klassifizierung als solche eindeutig. Tatsächlich sind solche Zustände bereits beobachtet worden. So benötigt die Beschreibung, der von der *Crystal Barrel* Kollaboration [2] gemessenen Reaktion $\bar{p}d \to \pi^-\pi^0\eta p_{\text{spectator}}$ einen Zustand, der mit relativem Bahndrehimpuls $L = 1$ in $\pi^0\eta$ zerfällt. Diese Resonanz, $\hat{\rho}(1405)$, mit einer Masse von $1405\,\mathrm{MeV/}c^2$ hat die „exotischen Quantenzahlen“ $J^{PC} = 1^{-+}$. Dieser Zustand wurde auch von der *E862*-Kolaboration [3] am *BNL*[8] gesehen, die ihn als $\pi_1(1400)$ bezeichnet.

- Exoten 3. Art
  Diese auch als Krypto–Exoten bezeichneteten Teilchen besitzen Quantenzahlen, die sich nicht von denen gewöhnlicher $q\bar{q}$–Mesonen und deren radialen Anregungen unterscheiden. Da bereits das gewöhnliche Mesonenspektrum viele verschiedene Kombinationen von Quantenzahlen zuläßt, ist dies der wahrscheinlichste Fall einen Exoten zu beobachten, aber zugleich auch der schwierigste Fall ihn als solchen zu klassifizieren. Ein Beispiel hierfür ist der *Glueball*–Kandidat $f_0(1500)$. Für einen reinen *Glueball* würde man erwarten, daß er *Flavor*–blind zerfällt. Dies bedeutet, daß sich die $SU(3)_{\text{Flavor}}$–Kopplungen an die verschiedenen Endzustände wie folgt verhalten sollten: $\pi\pi : \eta\eta : \eta\eta' : K\bar{K}$ wie $3 : 1 : 0 : 4$. Von der *Crystal Barrel* Kollaboration wurden diese Verhältnisse zu $3 : \approx 0,4 : \approx 1,5 : \approx 0,7$ bestimmt. Also zerfällt das $f_0(1500)$ nicht *Flavor*–blind. Einen Ausweg bietet das $f_J(1700)$ [4, 5], dessen Spin in mehreren Analysen zu Null bestimmt wurde. Auch das $f_0(1700)$ galt längere Zeit als *Glueball*–Kandidat. Heute wird es häufig als $s\bar{s}$–Partner im skalaren Nonett interpretiert, da es stark an $K\bar{K}$ koppelt. Amsler und Close [6] haben vorgeschlagen, daß das $f_0(1700)$ mit dem $f_0(1500)$ mischen könnte, da beide Resonanzen gleiche Quantenzahlen haben. Dies würde erklären, warum das $f_0(1500)$ nur schwach an $K\bar{K}$ koppelt.

1.3.3 Reaktionen zur Produktion von Mesonen und Exoten

Zur Untersuchung von Mesonen stehen vielfältige Möglichkeiten zur Verfügung, von denen hier fünf genannt werden sollen. In Hinblick auf die Suche nach exotischen Teilchen, insbesondere nach Gluonenbällen, können diese in Gluonen–arme und Gluonen–reiche Prozesse eingeteilt werden. Zu den Gluonen–armen Prozessen gehören:

- Photon–Fusion.
  Für Photon–Fusionen werden Elektronen und Positronen „streifend“ aufeinandergeschossen, sodaß die Ausgangsteilchen im Endzustand wieder nachweisbar sind. Da Elektronen und Positronen über den Austausch von Photonen miteinander wechselwirken, können auf diese Weise neben der elastischen Streuung auch Reaktionen des Typs $\gamma\gamma \to X$ untersucht werden.

- Hadronenstrahlen ($\pi^{\pm}$, $K^{\pm}$) auf Protonen.
  Diese Reaktionen sind zwar reich an Quarks, jedoch nicht an Gluonen. Eine Produktion von Gluebällen ist unterdrückt, da Umordnungsprozesse zwischen den Quarks wahrscheinlicher sind.

Zu den besonders Gluonen–reichen Prozessen zählen:

[8] *BNL*: *Brookhaven National Laboratory*

- Zentrale Produktion.
  Die zentrale Produktion ist das hadronische Gegenstück zur Photon–Fusion. In diesem Fall werden zwei Protonen „streifend" aneinander vorbeigeschossen. Dabei können sie über den Austausch von Gluonen miteinander wechselwirken.

- Radiative J/ψ–Zerfälle.
  Das J/ψ ist ein $c\bar{c}$–Zustand, der infolge der Energieerhaltung nicht in Mesonen zerfallen kann, die ebenfalls ein c–Quark enthalten. Daher besitzt das J/ψ eine lange Lebensdauer und kann exklusiv, zum Beispiel in e^+e^-–Reaktionen, angeregt werden. In den radiativen Zerfällen entstehen ein Photon und Gluonen, die einen gebundenen Zustand bilden können.

- Antiproton–Proton Annihilation.
  In der Vernichtung eines Protons und eines Antiprotons finden zwar auch Umordnungsprozesse zwischen den Quarks statt, dennoch ist die Vernichtung eines Quark–Antiquark Paares in Gluonen sehr wahrscheinlich. Aus diesem Grund gilt die Antiproton–Proton Annihilation als Gluonen–reicher Prozeß.

Kapitel 2

Aufbau des Experiments

In diesem Kapitel wird der experimentelle Aufbau beschrieben, welcher Vorraussetzung für die hohe Qualität der Daten war, die in dieser Arbeit vorgestellt und analysiert werden.

2.1 Erzeugung der Antiprotonen

Die Antiprotonen, die dem Crystal Barrel Experiment vom *CERN*[1] zur Verfügung gestellt wurden, hatten einen langen Weg durch den Beschleuniger-Park des *CERN* hinter sich, bevor sie im Target des Detektorsystems annihilierten. Abbildung 2.1 gibt eine Übersicht über den Proton–Antiproton–Komplex. Protonen wurden mit einem Linearbeschleuniger *LINAC*[2] in das Beschleunigersystem eingeschossen. Nach einer Vorbeschleunigung im

[1] *CERN*: *Conseil Européenne pour la Recherche Nucléaire* (Rat für europäische Nuklearforschung)
[2] *LINAC*: *Linear Accelerator*

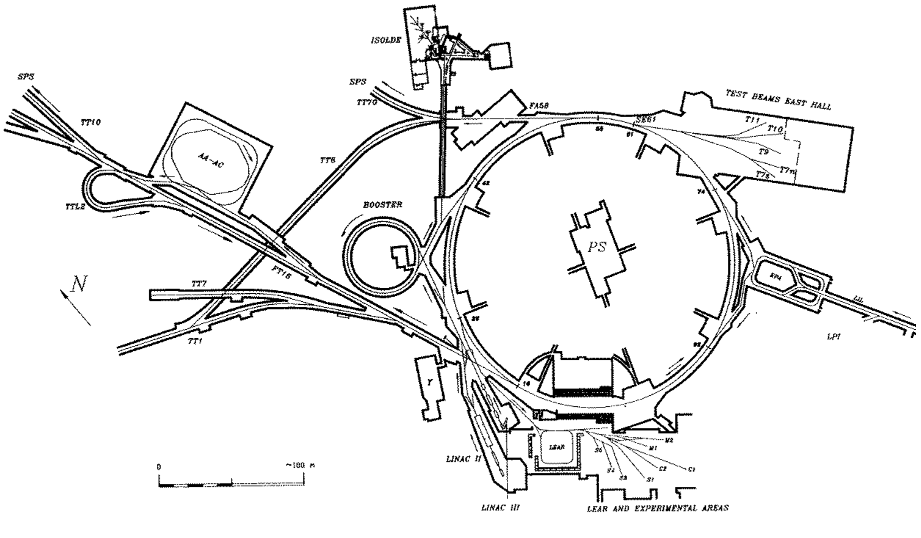

Abbildung 2.1: **Protonen–Antiprotonen–Beschleuniger–Komplex des *CERN* [7].**

PSB[3] wurden sie im Hauptbeschleuniger PS[4] bis auf 26 GeV/c beschleunigt. Die Protonen reagierten anschließend an einem Wolframtarget, wobei sich ein Teil der kinetischen Energie zu einem Proton–Antiproton–Paar materialisierte. Die Antiprotonen wurden in dem AA[5] aufgesammelt und durch stochastische Kühlung im AC[6]–Ring in ihrem Phasenraum reduziert. Danach durchliefen die Antiprotonen das PS und wurden dabei auf 600 MeV/c abgebremst; erst dann konnten sie in den $LEAR$ eingebracht werden. Auf diese Weise gelangten etwa 10^{12} Antiprotonen pro Tag in den $LEAR$, die in Raten von bis zu 10^7 Teilchen/s den verschiedenen Experimenten in der Experimentierzone des $LEAR$ zugeführt wurden. Die hervorragende Strahlqualität des $LEAR$ wurde durch den Einsatz einer stochastischen Kühlung und einer Elektronenkühlung erreicht, die eine relative Impulsunschärfe von 5×10^{-4} ermöglichten. Der Impuls der Antiprotonen war stufenlos im Bereich von 60 MeV/c bis $1,94$ GeV/c durchstimmbar, bei einer horizontalen Strahlemittanz von $2\pi \times \mathrm{mm} \times \mathrm{mrad}$. Durch die extrem langen Speicherzeiten enthielt der Strahl faktisch keine Verunreinigungen durch Pionen oder Kaonen, die im Gegensatz zu den Antiprotonen auf Grund ihrer kurzen Lebensdauer sehr schnell zerfallen.

[3] *PSB: Proton Synchroton Booster*
[4] *PS: Proton Synchroton*
[5] *AA: Antiproton Accumulator*
[6] *AC: Antiproton Cooler*

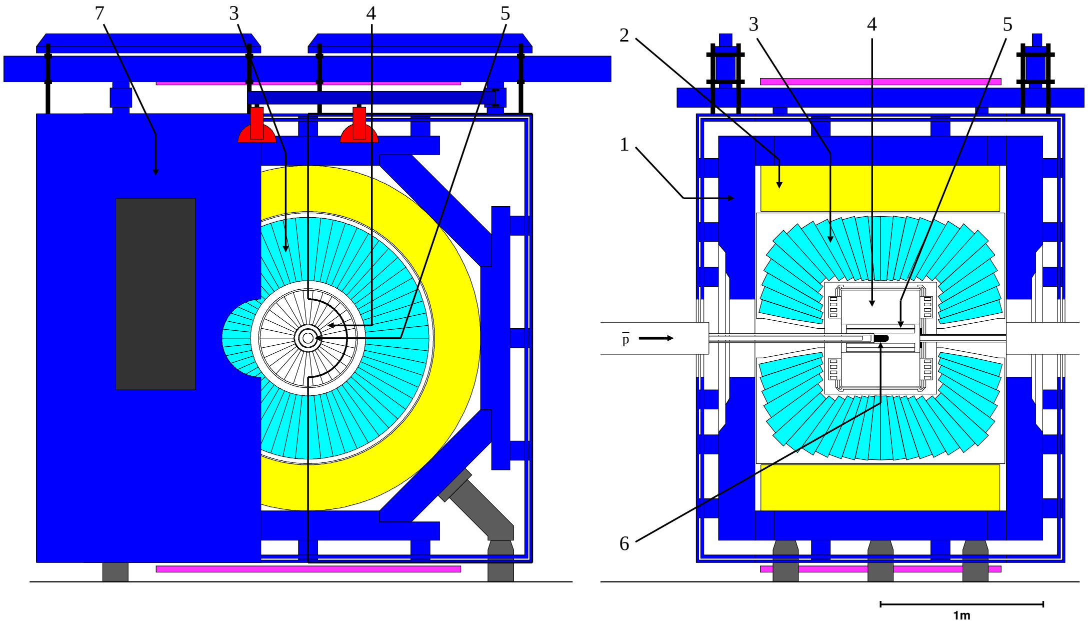

Abbildung 2.2: **Crystal Barrel Detektorsystem.**
In dem Längs– und Querschnitt sind dargestellt:
(1) Eisenjoch, (2) Magnetspule, (3) Kristallkalorimeter, (4) Jet–Driftkammer, (5) Proportionaldrahtkammer (ab September 1995 Silizium–Vertexzähler), (6) Wasserstofftarget und (7) Eisenabschirmung.

2.2 Crystal Barrel Detektorsystem

Einen Überblick über das Detektorsystem gibt Abbildung 2.2 [8, 9]. Zur Untersuchung der Annihilation in Ruhe wurden Antiprotonen mit einem Impuls von 200 MeV/c in das Wasserstofftarget eingeschossen; für die Annihilation im Fluge wurden Daten zwischen 600 MeV/c und 1940 MeV/c Strahlimpuls aufgezeichnet.
Das Wasserstofftarget wird von zwei konzentrischen, zylindrischen Drahtkammern – der Proportionaldrahtkammern (PWC[7]) und der Jet–Driftkammer (JDC[8]) umgeben. Die PWC wurde im September 1995 durch einen Silizium-Vertexzähler ($SVTX$[9]) ersetzt. Der Vertexzähler und die Jet–Driftkammer befinden sich im Innern des faßförmigen Kristallkalorimeters, das dem Detektorsystem seinen Namen gibt. Um eine Krümmung der Spuren geladener Teilchen in der Drahtkammer zu erreichen, befinden sich alle aktiven Komponenten des Detektorsystems in einem Magnetfeld. Das Magnetfeld wird von einer normalleitenden Solenoidspule ($B_r \approx 0 \approx B_\phi$, $B_z \neq 0$) erzeugt, die in der Lage ist, ein Magnetfeld von bis zu $1,5$ T im Innenraum zu erzeugen, mit einer relativen Homogenität von besser als 2 % im Bereich der Drahtkammern. Die Magnetspule ist zur Führung des magnetischen Flusses in ein Eisenjoch eingefaßt.

2.2.1 Wasserstofftarget

Das zylinderförmige Target hat eine Länge von 44 mm und einen Durchmesser von 17 mm und kann mit flüssigem Wasserstoff (LH_2) oder Deuterium (LD_2) gefüllt werden. Bei einem Strahlimpuls von 200 MeV/c werden die Antiprotonen im Zentrum des Targets gestoppt, bevor sie annihilieren. Dies geschieht mit einer longitudinalen Streuung von $0,6$ mm. Bei höheren Strahlimpulsen sinkt die Reaktionsrate, und der Anteil der Annihilationen, die im Wasserstofftarget stattfinden, beträgt $1,4$ % bei $0,6$ GeV/c und $0,8$ % bei $1,9$ GeV/c. Nach Verlassen des Antiprotonen–Strahls durch das Beryllium–Austrittsfenster des *LEAR*–Strahlrohrs passiert der Strahl einen ersten Siliziumzähler S_1, welcher der Strahldefinition dient. Eine segmentierte Siliziumdiode S_2 direkt vor dem Wasserstofftarget ermöglicht eine optimale Fokussierung des Strahls und dient als Eingangszähler für Antiprotonen, die in das Target gelangen, sowie als Start–Signal für den Trigger. Für einige Messungen wurde noch ein weiterer Siliziumzähler S_3 benutzt, der ein zusätzliches Triggersignal lieferte

[7] PWC: *Proportional Wire Chamber*
[8] JDC: *Jet Drift Chamber*
[9] $SVTX$: *Silicon Vertex Detector*

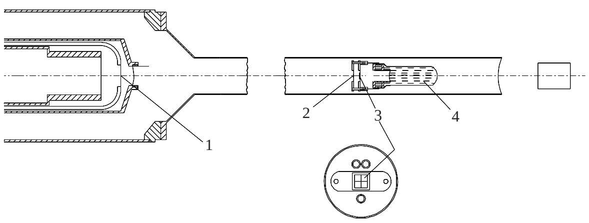

Abbildung 2.3: **Wasserstofftarget.** *Schematischer Aufbau des Experimentes im Bereich des Wasserstofftargets:*
(1) Beryllium–Austrittsfenster,
(2) Siliziumzähler S_1,
(3) Segmentierte Siliziumdiode S_2 und ggf. Siliziumzähler S_3,
(4) LH_2–Target.
Hinter dem Target (rechts im Bild) befand sich ggf. ein Veto–Zähler.

und ebenfalls zur Fokussierung diente. Zur Vermessung der Annihilation im Fluge befand sich hinter dem Target (im Bild rechts) zusätzlich noch ein Veto–Zähler.

2.2.2 Silizium–Vertexzähler

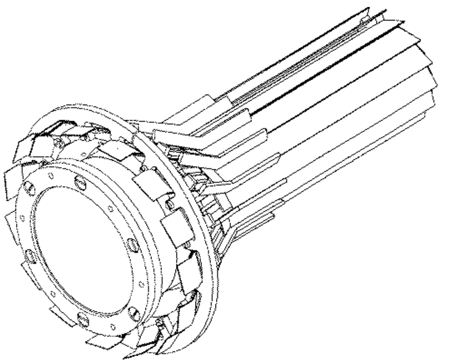

Abbildung 2.4: **Silizium–Vertexzähler (*SVTX*)**

Der Silizium–Vertexzähler besteht aus 15 unabhängigen SiO_2 - Fächern (engl. *paddles*), die das Target in einem radialen Abstand von 13 mm umschließen. Auf jedem der Fächer befinden sich 128 Streifen der Dicke 370 μm, die in Strahlrichtung verlaufen. Die hohe Ansprechwahrscheinlichkeit von nahezu 100 % ermöglicht die sehr genaue Vermessung eines Spurpunktes eines jeden geladenen Teilchens. Die schnelle Auslese (0.5 μs) der Rückseite (engl. *backplane*) ermöglicht die Verwendung des *SVTX* im Trigger. Eine ausführliche Beschreibung des *SVTX* befindet sich in [10].

2.2.3 Jet–Driftkammer

Die Jet–Driftkammer (*JDC*, Abbildung 2.5) dient dem Nachweis und der Identifizierung geladener Teilchen. Jet–Driftkammern sind optimiert für den Einsatz in solenoiden Magnetfeldern, da sie erheblich mehr Meßpunkte für radial verlaufende Teilchenspuren liefern als andere Driftkammern. Aus der Krümmung der Bahnspuren im Magnetfeld läßt sich

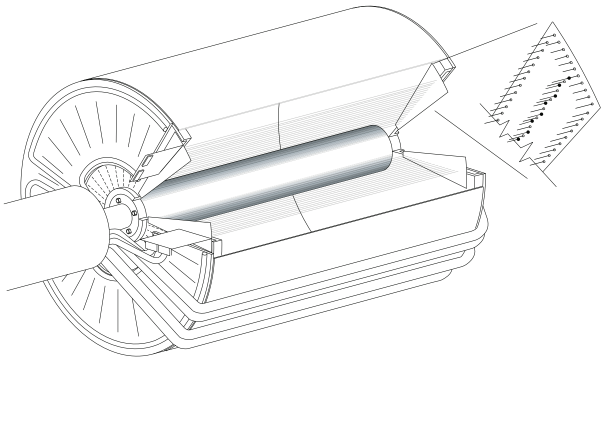

Abbildung 2.5: **Jet–Driftkammer (JDC).**
Die schematische Darstellung der JDC zeigt in der Vergrößerung einen der 30 Sektoren. In der Mittelebene des Sektors erkennt man die versetzt angeordneten Signaldrähte.

der Impuls eines geladenen Teilchens mit einer Auflösung von

$$\frac{\sigma_{p_T}}{p_T} = p_T \frac{\sigma_{r\phi}}{eBL^2} \sqrt{\frac{750}{N+5}} \tag{2.1}$$

bestimmen (ohne Berücksichtigung von Vielfachstreuung) [11]. Hierbei ist $N \leq 23$ die Anzahl der Drähte, L die Bahnlänge, $B = 1,5\,\mathrm{T}$ die Magnetfeldstärke und p_T der transversale Impuls des Teilchens. Dies ergibt für ein Pion von $p_T = 300\,\mathrm{MeV}/c$ eine Auflösung von ca. 2 %. Die *JDC* besteht aus 30 gleichartigen, azimutal angeordneten Sektoren, von denen jeder 23 Signaldrähte, 58 Felddrähte und 22 Feldkorrekturdrähte enthält. Wenn mindestens ein Signaldraht anspricht, beträgt der aktive Raumwinkel der JDC $94,8\,\% \cdot 4\pi$; bei allen 23 Drähten sinkt er auf $63\,\% \cdot 4\pi$. Die Signaldrähte in der Mittelebene eines Sektors sind um $a = 0,2\,\mathrm{mm}$ versetzt angeordnet (*Staggering*), um die Links–Rechts–Uneindeutigkeit einer Teilchenspur aufzulösen. Die Funktionsweise der *JDC* beruht auf der Ionisation der Gasatome entlang der Trajektorie eines geladenen Teilchens. Die freigesetzten Primärelektronen driften in dem hohen elektrischen Feld der Felddrähte zum Signaldraht und ionisieren ihrerseits Gasatome (Sekundärionisation), was zur Ausbildung einer Elektronenlawine führt. Eine Bestimmung des Ortes der Primärionisation wird durch das hohe Magnetfeld erschwert. Unter dem Einfluß der Lorentzkraft weicht die Richtung der Drift um den sogenannten Lorentzwinkel α_L von der Richtung des elektrischen Feldes ab. Um diesen Effekt zu mildern, wird ein „langsames“ Gasgemisch aus Kohlendioxyd und Isobutan benutzt, in dem sich die Elektronen mit einer Driftgeschwindigkeit von nur $0,8\,\mathrm{cm/ms}$ bewegen, so daß der Lorentzwinkel kleiner als 7.2° bleibt. Der negative Einfluß der niedrigen Driftgeschwindigkeit auf die Driftzeit wird durch die kurzen Driftwege teilweise kompensiert. Über eine Messung der Driftzeit wird eine Ortsauflösung von $100\,\mu\mathrm{m}$ in der $r\phi$-Ebene erreicht [12]. Die z-Koordinate wird durch die Auslese der Signaldrähte an beiden Enden über die Methode der Ladungsteilung mit einer Auflösung von $\sigma_z = 8\,\mathrm{mm}$ bestimmt [13]. Die Signalhöhen dienen zusätzlich der Messung des spezifischen Energieverlustes dE/dx eines geladenen Teilchens auf seinem Weg durch die Kammer. Dies erlaubt eine Pion–Kaon–Separation bis zu Impulsen von ca. $500\,\mathrm{MeV}/c$. Die genaue Messung der Driftzeit macht eine aufwendige Kontrolle der elektrischen Feldstärke, der Zusammenzetzung des Gasgemisches, der Temperatur und des Druckes erforderlich, da die Driftgeschwindigkeit empfindlich von diesen Parametern abhängt.

2.2.4 $CsI(Tl)$–Kalorimeter

Zum Nachweis von Photonen aus der $\bar{p}p$–Annihilation besitzt das Crystal Barrel Detektorsystem ein modulares, faßförmiges Kristallkalorimeter [11], dessen 1380 Kristalle aus mit $0,1\,\mathrm{mol}\%$ Thallium dotiertem Cäsiumjodid $CsI(Tl)$ bestehen. Das Kalorimeter läßt sich in zwei unabhängige Hälften teilen, um Zugang zu den inneren Detektorkomponenten zu ermöglichen. Die Frontseiten der Kristalle sind auf den Annihilationsvertex im Zentrum des Detektorsystems ausgerichtet. Die Länge von 30 cm (entspricht 16,1 Strahlungslängen) eines Kristalls ermöglicht die Messung von Photonen bis zu einer Energie von 2 GeV mit hoher Energieauflösung. Als Halterung dient eine $100\,\mu\mathrm{m}$ starke Titanhülle, in der jeder Kristall eingefaßt ist. Abbildung 2.6 zeigt ein derartiges Kristallmodul. Eine Auslese des Szintillationslichtes mit einem Photoelektronenvervielfacher ist nicht möglich, da sich das Kalorimeter in einem starken Magnetfeld befindet. Aus diesem Grund werden Photodioden verwendet. Ein Wellenlängenschieber (*WLS*[10]) vor der Photodiode dient dazu, das

[10] *WLS*: *Wave Length Shifter*

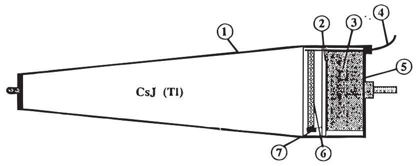

Abbildung 2.6: **Kristallmodul des Kalorimeters.**
(1) Titanhülle,
(2) und (3) Leiterplatine,
(4) optische Faser,
(5) Endkappe,
(6) Wellenlängenschieber,
(7) Photodiode.

Emissionsspektrum von $CsI(Tl)$ optimal an den Wellenlängenbereich anzupassen, in dem die Diode am empfindlichsten ist. Die WLS bestehen aus 3 mm starkem Plexiglas und absorbieren Licht im Bereich von 520 nm bis 570 nm, daher passend zum Emissionsmaximum von $CsI(Tl)$ bei 550 nm, und emittieren es bei höheren Wellenlängen. Zudem konzentrieren die WLS das Emissionslicht auf ihre schmalen, lateralen Oberflächen, auf denen die Photodiode aufgeklebt ist. Die andere dem Kristall abgewandte Oberfläche ist weiß gestrichen, um den Lichtsammlungseffekt zu verstärken. Das elektrische Signal der Photodiode wird zunächst vorverstärkt, dann einer zeitlichen Pulsformung unterworfen und schließlich digitalisiert. Über eine optische Faser ist der WLS eines jeden Moduls mit einem Lichtpulser (Xenon-Blitzlampe) verbunden [14]. Mit einem Lichtpuls bekannter Intensität ist es möglich, die zeitliche Stabilität der Lichtausbeute der WLS zu überwachen und defekte Kristallmodule zu identifizieren. Eine Änderung der Lichtausbeute in den Kristallen (z.B. durch Strahlungsschäden) wird damit allerdings nicht erfaßt. Bereits vor dem Einbau in das Kalorimeter wurde jedes Modul mit einer $Pu^{13}C$–Quelle, die ein 6,1 MeV Photon emittiert, vorkalibriert. Nach jeder Experimentierphase wird jedes Modul neu kalibriert. Zu diesem Zweck wird mit einem iterativen Verfahren für jedes separate Kristallmodul die Summe des Szintillationslichtes auf einen gemeinsamen Mittelwert des 135 MeV/c^2–Peaks (Masse des π^0) in der invarianten Masse zweier Photonen normalisiert [15]. Die spezielle faßförmige Geometrie des Kalorimeters erfordert 13 verschiedenen Kristalltypen, die in 26 Ringen zu je 60 Modulen (bzw. 30 Module in der Nähe der Strahlachse) angeordnet sind. Für den Ein– und Austritt des Strahls (und für Kabelstränge) mußten zwei gegenüberliegende Öffnungen gelassen werden, die den geometrischen Raumwinkelbereich, den das Kalorimeter maximal erfassen kann, auf $97,8\,\% \times 4\pi$ beschränken. Leckverluste in den Randkristallen und an den Rändern der beiden Faßhälften führen zu einer effektiven Raumwinkelbedeckung von ca. $95\,\% \times 4\pi$. Jedes Kristallmodul erfaßt dabei einen Winkel von 6° in azimutaler und 6° (bzw. 12° für die Randkristalle) in polarer Richtung. Die Segmentierung erlaubt eine maximale Ortsauflösung von ca. 20 mrad in ϕ– und Θ–Richtung. Dies reicht für die Trennung zweier Photonen, die aus dem Zerfall eines π^0 stammen, das einen maximalen Impuls von 1 GeV hat, entsprechend einem minimalen Öffnungswinkel der beiden Photonen von 16.6°. Die Energieauflösung des Kalorimeters wird beschrieben durch:

$$\frac{\sigma_E}{E} = \frac{2-3\%}{\sqrt[4]{\frac{E}{\mathrm{GeV}}}} \qquad (2.2)$$

2.2.5 Triggersystem

Um seltene Zerfallsmoden zu untersuchen und schon zur Experimentierzeit die Daten mit diesen Zerfallskanälen anzureichern, ist ein schnelles Triggersystem erforderlich [17]. Da die Komponenten des Detektorsystems unterschiedliche Totzeiten besitzen, ist es zweckmäßig,

Stufe	Detektorkomponente	Information und ggf. Bedingungen	Zeit für eine Entscheidung [μs]
0	Siliziumzähler	einkommendes $\bar{p}$	0.1
1	*PWC/SVTX* *JDC* Kalorimeter (*FACE*)	Geladene Multiplizität, K_S^0-Trigger. Geladene Multiplizität. Gesamt–Multiplizität.	25
Level 2	*JDC* Kalorimeter	Linearisierung, Driftzeit, dE/dx. Lokale Maxima in den Clustern, Energien, Energieerhaltung, invariante Massen (π^0, η)	100-1000

Tabelle 2.1: **Triggerhierarchie.**
Die Tabelle gibt an, welche Informationen in welcher Zeit zur Verfügung stehen, und die Bedingungen, die daran geknüpft werden können.

den Auslösemechanismus zur Datenaufnahme hierarchisch nach der Auslesezeit zu ordnen. Das Triggersystem des Crystal Barrel Detektorsystems besitzt daher drei Stufen, die jeweils die Rate der akzeptierten Ereignisse um etwa eine Größenordnung reduzieren. Tabelle 2.1 gibt einen Überblick über die Triggerstufen und über die Bedingungen, die an ein Ereignis auf der jeweiligen Triggerstufe gestellt werden können. Die niedrigste Stufe (0) spricht auf ein Signal der Siliziumzähler vor dem Target (Abb. 2.3) an. Sie wird durch ein Antiproton aktiviert, das in das Target gelangt, und gibt das Startsignal für die Ausleseelektronik der Drahtkammern und des Kalorimeters. Auf der nächsten Stufe (1), die ebenfalls vollständig in Hardware realisiert ist, wird die geladene Multiplizität bestimmt. Die Information über die Gesamtmultiplizität im Kalorimeter steht auf dieser Stufe zur Verfügung, indem die Signale der Kristallmodule über einen Diskriminator einem *FACE*[11]–Prozessor zugeführt werden [18], der in der Lage ist, die Anzahl der Cluster im Kalorimeter zu bestimmen. Die höchste Triggerstufe (2) basiert auf einem Motorola 68040–Prozessor, der unter dem Betriebssystem *OS–9* programmiert werden kann. Auf dieser Stufe stehen alle Rohdaten des Kalorimeters zur Verfügung. Dies erlaubt zum Beispiel eine Berechnung der Gesamtenergie zur Überprüfung des Energiesatzes. Erfüllt ein Ereignis die Bedingungen einer jeden Triggerstufe, so werden die Daten von einem globalen Ereignisprozessor (*Global Event Builder*) zusammengefaßt und auf *IBM 3480* Magnetbänder geschrieben. Letztere wurden im September 1995 durch *DLT*-Magnetbänder von *DEC* ersetzt.

[11] *FACE*: engl. *Fast Cluster Encoder*

Kapitel 3

Präparation der Datensätze

Mit dem Crystal Barrel Detektor werden sowohl geladene, als auch neutrale langlebige Teilchen direkt gemessen. In diesem Sinne langlebige Teilchen sind zum Beispiel die geladenen Kaonen ($K^{\pm}$), Pionen ($\pi^{\pm}$), Leptonen ($e^{\pm}$, $\mu^{\pm}$), Protonen (p) und Antiprotonen ($\bar{p}$), sowie die neutralen langlebigen Kaonen (K_L), Neutronen (n) und Photonen (γ). In diesem Kapitel werden die Verfahren zur Rekonstruktion der „gemessenen" Endzustände der Antiproton–Proton–Annihilation vom Typ

$$(C^+C^-)^{n_c}\gamma^{n_\gamma}$$

erläutert. Dabei bezeichnet n_γ die Anzahl der Photonen und n_c die Anzahl der geladenen Teilchen der Sorte C, wobei C für Pion oder Kaon steht[1]. Anschließend werden aus den „gemessenen" Endzuständen, mit Hilfe der kinematischen Anpassung, die „mesonischen" Endzustände präpariert

$$(C^+C^-)^{n_c}M_m^{n_m}.$$

Analog zu n_c, bezeichnet n_m die Anzahl der Mesonen der Sorte M_m, wobei mit den verschiedenen Sorten M_m die neutralen Mesonen π^0, η, η' und ω gemeint sind.

[1] Auf ein Summenzeichen wurde hier der Kürze halber verzichtet, gemeint sind auch Endzustände vom Typ $K^+K^-\pi^+\pi^-\gamma^{n_\gamma}$.

Bibliothek	**Version**		**Zweck**
	$\pi^0\pi^0\pi^0$,$\pi^0\eta\eta$	$K^+K^-\pi^0$	
CBOFF	1.27/05	1.30/00	Steuerung der Datenrekonstruktion [19]
LOCATER	1.97/04	2.01/00	Auswertung der Spurkammerdaten [20]
BCTRAK	2.03/00	2.04/00	Auswertung der Kalorimeterdaten [21]
GTRACK	1.34/01	1.36/00	Rekonstruktion der Gesamtereignisse [22]
CBKFIT		3.09/00	Kinematische Anpassung [23]
CBGEANT	4.06/07	5.05/01	Monte Carlo–Simulationen [24]
GEANT	3.15/90	3.21/05	*CERN* Monte Carlo–Paket [25]
CBoOFF++	1.60/a	1.60/a	*C++* –Schnittstelle zu *CBOFF* [26]
BRAIN		3.03	Neuronales Netzwerk [27, 28]

Tabelle 3.1: **Programmbibliotheken.**
Die Tabelle gibt einen Überblick der Programm–Pakete, welche zur Rekonstruktion und Selektion der Datensätze verwendet wurden. Für die kinematischen Anpassungen der rein neutralen Kanäle (linke Spalte) wurde ein auf $\bar{p}p \to M_m^3 \to \gamma^6$ spezialisiertes Programm verwendet [29].

Die hierzu verwendeten Programm–Pakete sind in Tabelle 3.1 aufgelistet. Dieselben Programme wurden auch für simulierte Ereignisse benutzt.

3.1 Rekonstruktion von geladenen Teilchen

Zur Rekonstruktion geladener Teilchen werden zunächst die aufgezeichneten Driftzeiten und Signalamplituden der Jet-Driftkammer in Ortskoordinaten umgerechnet[2]. Die so gewonnene Menge von Meßpunkten muß dann von einem Mustererkennungsalgorithmus einzelnen Teilchenspuren zugewiesen werden. Die hierfür, bis Mitte 1995, angewandte Methode, die auf der Suche nach dem nächsten Nachbarn beruhte, wurde durch die „Fuzzy Radon Transformation“ abgelöst. Eine ausführliche Beschreibung dieser Methode findet sich in [30]. Insbesondere die Zuordnung von Spurpunkten kurzer Spuren und nahezu parallel zu den Signaldrähten verlaufender Spuren konnte durch diese Methode entscheidend verbessert werden. Diese Fälle sind bei der Annihilation im Fluge, insbesondere bei hohen Strahlimpulsen, sehr häufig. Jede Spur wird dann in der r–z–Ebene an eine Gerade und in der r–ϕ–Ebene an einen Kreis angepaßt. Die Kreis– und die Geraden–Parameter gehen als Startwerte in eine Anpassung an eine Helix ein. Aus der Krümmung α der Helix, dem Winkel Ψ_0 zwischen der x–Achse und der Tangente an die $r\phi$–Projektion der Helix im

[2]Für Daten, die vor dem September 1995 genommen wurden, werden auch die Spurpunkte der *PWC* berücksichtigt. Gleiches gilt für den später verwendeten Silizium–Vertexdetektor. Allerdings war zum Zeitpunkt der Prozessierung der in dieser Arbeit vorgestellten Daten der Vertexdetektor noch nicht kalibriert. Die sehr genau vermessenen Spurpunkte des *SVTX* wurden daher noch nicht berücksichtigt. Der *SVTX* wurde daher nur für den Trigger auf zwei geladene Teilchen eingesetzt und entsprechend simuliert.

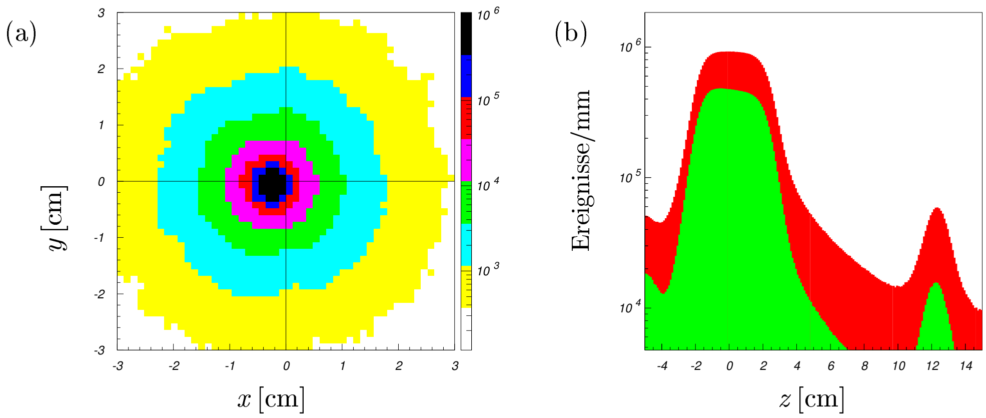

Abbildung 3.1: **Annihilationsvertex für die Datennahme im September 1995 (Antiprotonen–Strahlimpuls $p_{\bar{p}} = 1940\,$MeV/c).**
Der Punkt ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) markiert das Zentrum des Detektors.
(a) Der x–y–Vertex. Das Kreuz markiert die Position ($x = 0$, $y = 0$). Der Vertex liegt etwas verschoben (um $x = -2,2mm$ und $y = -0,05mm$), das Target befand sich also nicht exakt im Zentrum des Detektors. Diese Verschiebung wurde bei der Generierung von Monte Carlo–Ereignissen berücksichtigt.
(b) Der z–Vertex. Im Vordergrund Ereignisse mit genau zwei geladenen Spuren. Bei ca. $z = 12cm$ befand sich der Veto–Zähler, dessen Ineffizienz als Spitze auftaucht.

ersten Spurpunkt, dem Neigungswinkel λ der Helix und dem bekannten Magnetfeld B, kann der Viererimpuls $\tilde{p_c}$ des geladenen Teilchens bestimmt werden:

$$\tilde{p_c} = \begin{pmatrix} \sqrt{m_c^2 + p_c^2} \\ p_t \cos \Psi_0 \\ p_t \sin \Psi_0 \\ p_t \tan \lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{c} p_t = \frac{qB}{\alpha} \\ p = p_t \sqrt{1 + \tan^2 \lambda} \end{array} \tag{3.1}$$

Hierbei ist q die Ladung des Teilchens, deren Vorzeichen ebenfalls in die Parametrisierung der Helix eingeht, p der Betrag des Gesamtimpulses, $p_t = p_{xy}$ der Betrag des transversalen Impulses und m_c die Masse des geladenen Teilchens. Abschließend werden alle geladenen Spuren an einen gemeinsamen Vertex angepaßt. Das Ergebnis einer solchen Anpassung ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Existieren Spuren, deren erster Spurpunkt außerhalb der vierten Drahtlage liegt, so wird nach einem sekundären Vertex gesucht, der zum Beispiel durch den Zerfall eines $K_S \to \pi^+\pi^-$ entstehen kann.

3.1.1 Pion–Kaon–Separation

Bei Messungen mit einer Drahtkammer liegt die Verwendung des Energieverlustes pro Längeneinheit dE/dx zur Trennung geladener Pionen und Kaonen nahe. Der Energieverlust pro Längeneinheit dE/dx ist proportional zur gemessenen Signalhöhe der Spannungspulse der einzelnen Drähte. Nach der Bethe–Bloch–Formel hängt der Energieverlust pro Längeneinheit von der Geschwindigkeit $\beta = v/c$ des Primärteilchens ab. Wird dE/dx gegen den Impuls des Teilchens aufgetragen, dann sollten sich für unterschiedliche Massen der Teilchen entsprechend unterschiedliche Banden zeigen. Vier Spektren dieser Art zeigt Abb. 3.2. Das Spektrum 3.2.a enthält alle Ereignisse, auch solche die unvollständig sind, zum Beispiel mit einer ungeraden Anzahl von Spuren. Durch die logarithmische Auftragung der Anzahl der Ereignisse, sind neben dem $\pi^\pm$–Band, auch Bänder der Kaonen, Protonen/Antiprotonen und sogar noch schwererer Fragmente zu sehen. Das Kaon–Band tritt stärker hervor, wenn genau zwei Spuren gefordert (Abb. 3.2.b) werden. Das Spektrum enthält immer noch eine Vielzahl von Ereignissen der elastischen Proton–Antiproton–Streuung. Abb. 3.2.d zeigt nur noch die vorselektierten Ereignisse mit zwei geladenen Teilchen und genau zwei Photonen. Das Kaon–Band ist nur schwach erkennbar, da Ereignisse mit Pionen viel häufiger sind. Zum Vergleich zeigt Abb.3.2.c simulierte Ereignisse, die zu etwa gleichen Teilen vom Typ $\pi^+\pi^-\pi^0$ und $K^+K^-\pi^0$ sind. Offensichtlich sind die Bänder für Pionen und Kaonen weder in den Daten–, noch in den simulierten Ereignissen, oberhalb eines Impulses von 500 MeV/c zu trennen. Die überwiegende Mehrheit der geladenen Teilchen, insbesondere in Ereignissen mit niedriger Multiplizität ($\pi^+\pi^-2\gamma$, $K^+K^-2\gamma$), weisen einen höheren Impuls (bis zu 1800 MeV/c) auf. Ereignisse mit wenigstens einem langsamen Teilchen, welches eine Trennung ermöglicht[3], sind sehr selten. Daher sind die Energieverlustspektren für die Selektion allein nicht ausreichend.

Auch eine eingehende Untersuchung der Energiedepositionen der geladenen Teilchen im Kalorimeter des Crystal Barrel–Detektors [31] erbrachte nur eine kleine Verbesserung. Diese resultierte aus der Tatsache, daß für Impulse $\left|\vec{p_\pm}\right|$ zwischen 400 MeV/c und 600 MeV/c, Pionen bereits ab etwa 400 MeV/c minimal ionisierend sind, Kaonen hingegen im Mittel noch etwa doppelt soviel Energie deponieren.

Die Separation der Endzustände $\pi^+\pi^-2\gamma$ und $K^+K^-2\gamma$ bei einem Antiprotonen–Strahlimpuls von 1940 MeV/c gelang schließlich durch Betrachtung kinematischer Größen. Die

[3]Wird bei Ereignissen der Proton-Antiproton Annihilation vom Typ $C^+C^-\gamma^{n_\gamma}$ eines der geladenen Teilchen als Kaon identifiziert, dann ist das andere zwangsläufig ebenfalls ein Kaon.

Energieverlustspektren dienten lediglich zur Kontrolle der Qualität der Selektion. Da der Impuls des einlaufenden Antiprotons fest vorgegeben ist, gilt wegen der Energie– und Impulserhaltung, für den Gesamtimpuls im Laborsystem

$$\left|\overrightarrow{p_{lab}}\right| = \left|\overrightarrow{p_{\bar{p}}}\right| = 1940\,\mathrm{MeV}/c \quad = \quad \left|\overrightarrow{p_{C^+}} + \overrightarrow{p_{C^-}} + \sum_{i=1}^{N_\gamma} \overrightarrow{p_{\gamma_i}}\right| \tag{3.2}$$

und für die Gesamtenergie im Laborsystem

$$E_{lab} \quad = \quad 3093\,\mathrm{MeV}/c^2 = E_{C^+} + E_{C^-} + \sum_{i=1}^{N_\gamma} E_{\gamma_i}$$

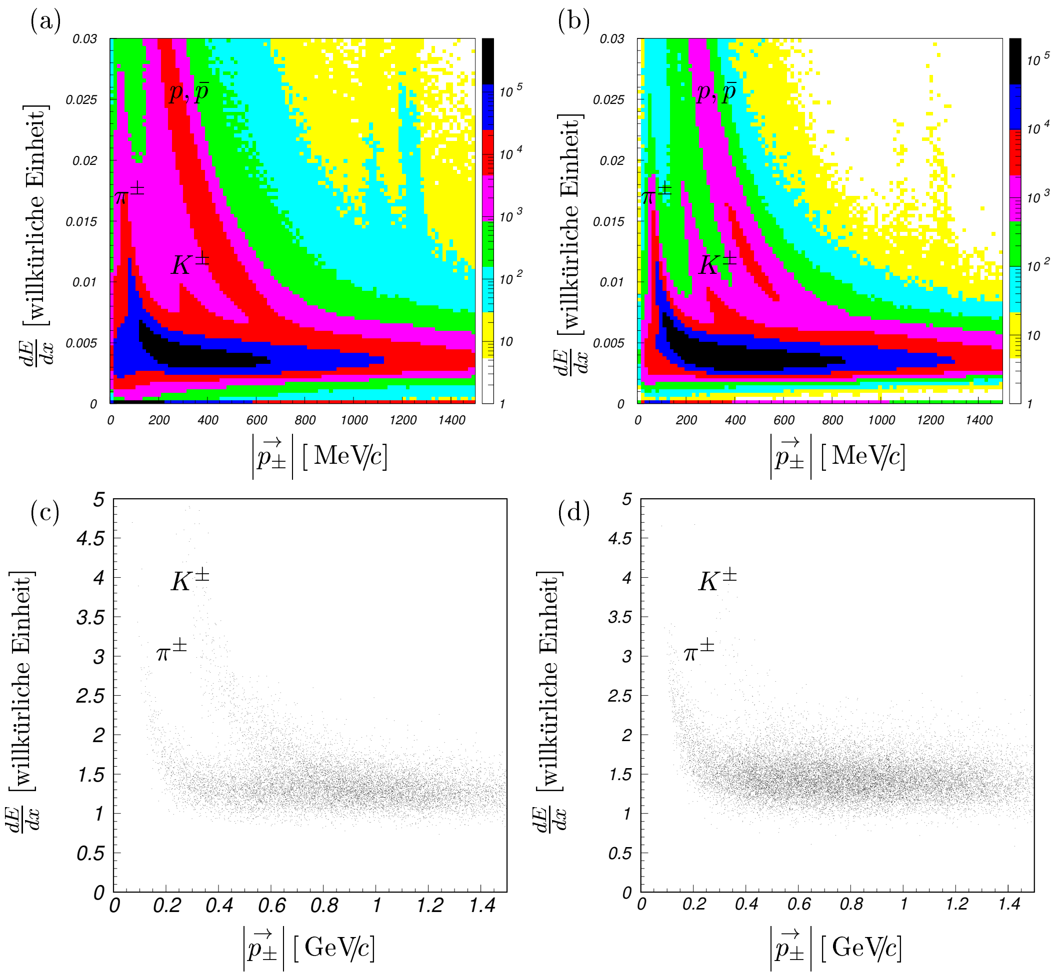

Abbildung 3.2: **Energieverlustspektren der geladenen Teilchen.**
Aufgetragen ist der spezifische Energieverlust dE/dx gegen den Impulsbetrag $\left|\vec{p}_\pm\right|$ der geladenen Teilchen.
(a) Alle Ereignisse der September 1995 Datennahme (Kapitel 3.4).
(b) Basisselektion, Ereignisse mit zwei geladenen Teilchen.
(c) Simulierte Ereignisse: Etwa zu gleichen Teilen $\pi^+\pi^-\pi^0$ und $K^+K^-\pi^0$.
(d) Vorselektierte Ereignisse vom Typ $C^+C^-\gamma\gamma$ (Kapitel 3.4.1).

$$= \sqrt{\overrightarrow{p_{C^+}}^2 + m_C} + \sqrt{\overrightarrow{p_{C^-}}^2 + m_C} + \sum_{i=1}^{N_\gamma} E_{\gamma_i} \tag{3.3}$$

Werden diese beiden Größen unter Annahme der Pionenmasse (Hypothese $C = \pi$) berechnet und gegeneinander aufgetragen, dann zeigen sich für simulierte Ereignisse (Abb. 3.3.a) wiederum zwei Bänder, jeweils eines für pionische und eines für kaonische Ereignisse. Die Bandstrukturen entsprechen den Meßfehlern der einzelnen Größen. Kaonische Ereignisse liegen aufgrund der falschen Massenhypothese systematisch zu niedrig. Bei den vorselektierten Ereignissen der September 1995 Datennahme (Abb.3.3.b) sind zwei getrennte Bänder allerdings nicht zu erkennen. Die Ursache hierfür liegt vornehmlich an der um zwei Größenordnungen höheren Anzahl der pionischen Ereignisse. Hinzu kommt, daß das kaonische Band weniger scharf eingrenzbar ist. Dies wiederum liegt nicht nur an den Meßfehlern allein. Im Gegensatz zu den pionischen Ereignissen, ergäbe sich für die kaonischen Ereignisse, auch bei exakter Messung, kein Punkt in dieser Auftragungsweise. Dies ist eine Folge der Annahme der Pionmasse zur Berechnung der Laborenergie. Die Abweichung von der Sollenergie ΔE_{lab} für kaonische Ereignisse ist, wegen der Wurzeln in Gl.(3.3), abhängig von der Aufteilung der Impulse auf die Kaonen. Da die Messung bei genauer Kenntnis von E_{lab} und $|\vec{p}_{lab}|$ kinematisch überbestimmt ist, kann Gl.(3.3) zur Bestimmung des Quadrates der Masse der geladenen Teilchen benutzt werden

$$m^2_{C^\pm} = \frac{\left[\left(E_{lab} - \sum_{i=1}^{N_\gamma} E_{\gamma_i}\right)^2 - \overrightarrow{p_{C^+}}^2 - \overrightarrow{p_{C^-}}^2\right]^2 - 4\, \overrightarrow{p_{C^+}}^2\, \overrightarrow{p_{C^-}}^2}{4\left(E_{lab} - \sum_{i=1}^{N_\gamma} E_{\gamma_i}\right)^2} \tag{3.4}$$

Abbildung 3.4.a zeigt diese Größe für die gleichen simulierten Ereignisse wie in Abb.3.3.a. Eine Trennung der Ereignistypen ist bereits in dieser (eindimensionalen) Auftragung ersichtlich. Bei exakter Messung ergäbe sich, sowohl für pionische als auch für kaonische

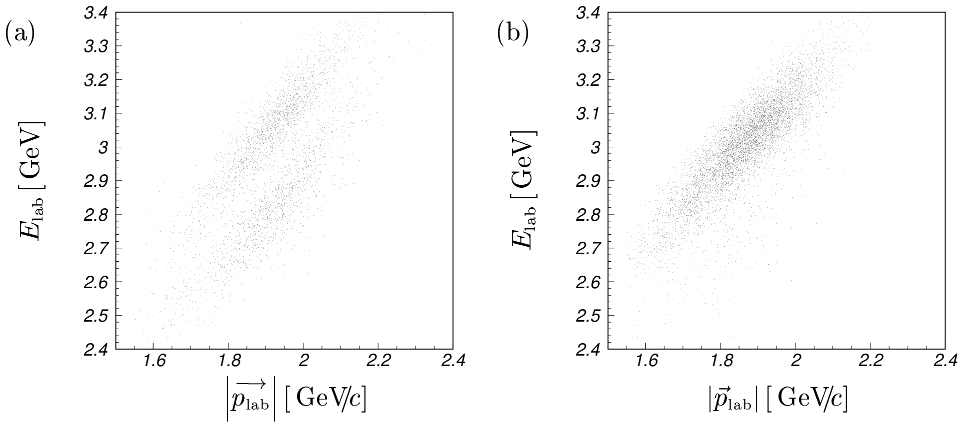

Abbildung 3.3: **E_{lab} vs. $|\vec{p}_{\mathrm{lab}}|$ für $C^+C^-2\gamma$-Ereignisse.**
Aufgetragen ist die Energie gegen den Betrag des Impulses im Laborsystem.
(a) Simulierte Ereignisse: Etwa zu gleichen Teilen $\pi^+\pi^-\pi^0$ und $K^+K^-\pi^0$.
(b) Vorselektierte Ereignisse der September 1995 Datennahme (siehe Kapitel 3.4).

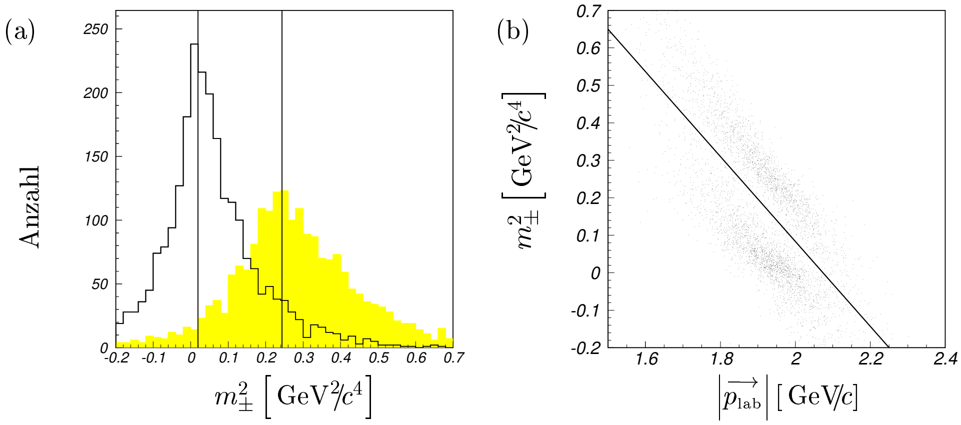

Abbildung 3.4: **Masse der geladenen Teilchen $m_{C^\pm}$ für $C^+C^-\gamma^2$–Ereignisse.** *Die Spektren zeigen simulierte Ereignisse – etwa zu gleichen Teilen $\pi^+\pi^-\pi^0$ und $K^+K^-\pi^0$.*
(a) $m_{C^\pm}^2$ nach Gl.(3.4).
(b) $m_{C^\pm}^2$ aufgetragen gegen den Betrag des Gesamtimpulses Gl. (3.2).

Ereignisse, eine scharfe Spitze bei dem Quadrat der jeweiligen Sollmasse (m_π^2, m_K^2). Wird, wie in Abb.3.4.b zu sehen, $m_{C^\pm}^2$ gegen den Betrag des Gesamtimpulses $\left|\overrightarrow{p_{lab}}\right|$ aufgetragen, dann wird der Meßfehler in den Einzelimpulsen implizit mitberücksichtigt. Eine Trennung der beiden Ereignistypen wird möglich (durch die Linie angedeutet). Die Feinabstimmung des Schnittes wurde anhand der Ergebnisse der kinematischen Anpassung vorgenommen.

3.2 Rekonstruktion von Photonen

Die digitalisierten Szintillationssignale der Kristallmodule werden zunächst mit Hilfe von Kalibrationskonstanten in Energiewerte umgerechnet. Zur Rauschunterdrückung werden nur Kristalle mit einem Energieeintrag oberhalb eines Schwellenwertes E_{SR} vom Mustererkennungsalgorithmus berücksichtigt. Anschließend werden im gesamten Kalorimeter benachbarte Kristalle mit einem Energiedeposit oberhalb einer weiteren Schwelle E_{SN} zu Gruppen zusammengefaßt. Die Schwelle E_{SN} dient dazu benachbarte, räumlich nur wenig überlappende elektromagnetische Schauer zu trennen. Ist die Summe aller Energien in einer solchen Gruppe größer als ein weiterer Schwellenwert E_{SC}, so definiert dies ein *Cluster*. Um auch Photonen mit räumlich stark überlappenden Schauern auflösen zu können, wird jedes *Cluster* auf lokale Maxima in den Energieeinträgen der Einzelkristalle untersucht. Existiert nur ein lokales Maximum im *Cluster*, so wird die gesamte Energiedeposition einem Photon zugeschrieben. Finden sich mehrere lokale Maxima, dann werden nur diejenigen einem Teilchen zugeordnet, deren Zentralkristalle Energieeinträge oberhalb eines weiteren Schwellenwertes E_{SP} liegen, sofern es sich nicht um das erste (größte) lokale Maximum im *Cluster* handelt. Dies definiert die Energiedeposition eines Teilchens aus der Primärreaktion – ein *PED*[4]. Endet zudem keine geladene Spur in der Nähe des Zentralkristalls des *PED*s, dann wird angenommen, daß es sich um ein Photon gehandelt hat. Die Definition eines *PED*s begründet sich jedoch nur aus dem mittleren Verhalten eines elektromagnetischen Schauers. Jeder Schauer für sich allein betrachtet kann jedoch durch

[4]*PED*: *Particle Energy Deposit*

Comptonstreuung und durch Ionionisation entstandene, schnelle „δ-Elektronen“ starke räumliche Fluktuationen in der Energiedeposition aufweisen. Werden die oben genannten Schwellenwerte in der Definition eines *PED*'s auf

- $E_{SR} = 1\,\mathrm{MeV}$ (minimale Energie im Einzelkristall),
- $E_{SN} = 4\,\mathrm{MeV}$ (minimale Energie für Nachbarn im *Cluster*),
- $E_{SC} = 20\,\mathrm{MeV}$ (minimale Energie des *Cluster*s) und
- $E_{SP} = 20\,\mathrm{MeV}$ (minimale Energie eines *PED*'s bei mehreren lokalen Maxima in einem *Cluster*)

festgelegt, dann zeigen Monte Carlo–Studien, daß bei rein neutralen Ereignissen (nur Photonen) und einem Strahlimpuls von 1940 MeV/c etwa 98% aller *PED*s tatsächlich einem einfallenden Photon entsprechen. Bei weniger als 2% aller *PED*s handelt es sich lediglich um eine räumliche Fluktuation im elektromagnetischen Schauer.
Wird das im vorherigen Abschnitt vorgestellte Entscheidungsverfahren zu Grunde gelegt, so ist im Falle eines einzelnen lokalen Maximums die Energie des Photons die Gesamtsumme aller Energieeinträge der Einzelkristalle im *Cluster*

$$E_\gamma = \sum_{i \in Cluster} E_i \tag{3.5}$$

Der Schwerpunkt der Energieverteilung $\vec{x}$ definiert den Auftreffpunkt des Photons und somit auch den Impuls

$$\vec{p_\gamma} = \vec{x} E_\gamma \tag{3.6}$$

Bei mehreren Maxima wird als Auftreffpunkt des Photons die Position des jeweiligen Zentralkristalls angenommen. Zur Energiebestimmung werden zunächst die Energieeinträge des Zentralkristalls und dessen acht nächste Nachbarn aufsummiert, ohne mögliche Überschneidungen zu berücksichtigen:

$$E_9 = \sum_i^9 E_i \tag{3.7}$$

Die Gesamtsumme aller Energieeinträge im *Cluster* wird dann im Verhältnis dieser Summen auf die einzelnen *PED*'s verteilt:

$$E_{PED} = \frac{E_9}{\sum E_9} E_{\mathrm{Cl}} \tag{3.8}$$

Die so bestimmte Energie des Photons weicht, wie man aus Monte Carlo–Studien weiß, von der nominalen Energie ab. Aus diesem Grund wird die rekonstruierte Energie noch mit einer energie– und ortsabhängigen Funktion Ξ korrigiert, um den Leckverlusten und den unterschiedlichen Kristalltypen Rechnung zu tragen:

$$E_\gamma = E_{PED}\,\Xi(\theta, E_{PED}) \tag{3.9}$$

Der Viererimpuls $\tilde{p_\gamma}$ eines Photons ist dann durch

$$\tilde{p_\gamma} = \begin{pmatrix} E_\gamma \\ E_\gamma \sin\theta\cos\phi \\ E_\gamma \sin\theta \sin\phi \\ E_\gamma \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

gegeben. Hierbei sind θ und ϕ die sphärischen Winkel des Vektors $\vec{x}$ in Gl.(3.6).

3.2.1 Separation von Photonen und Schauerfluktuationen

Gemessen an der sehr guten Energieauflösung der einzelnen $CsI(Tl)$–Kristalle, mit einer Nachweisschwelle von ca. 250 keV, erscheinen die gewählten Schwellen E_{SC} und E_{SP} sehr hoch, da nur noch Photonen mit einer Energie oberhalb von 20 MeV nachgewiesen werden können. Werden beide Schwellen auf 10 MeV abgesenkt, dann steigt der Anteil der elektromagnetischen Fluktuationen (sog. *Split-Offs*) von 2% auf 5% an (bei 1940 MeV/c Impuls der einlaufenden Antiprotonen, mit fallender Tendenz zu niedrigeren Strahlimpulsen). Es wurden daher mehrere Verfahren innerhalb der Crystal Barrel–Kollaboration entwickelt um Fluktuationen elektromagnetischer Schauer von Photonen zu unterscheiden:

- *SMART* [32] beruht auf den Korrelationen zwischen der invarianten Schauermasse[5], der gesamten Energiedeposition und der Anzahl der *PED*s in einem *Cluster*.
- *DOLBY* [33] verwendet den Öffnungswinkel zwischen zwei *PED*s.
- *BRAIN* [27, 28] ist ein *Feed Forward* neuronales Netz. Die Eingabedaten des Netzes sind die Energiedepositionen im Zentralkristall eines *PED*s und dessen acht nächsten Nachbarn, sowie Summen aus den Energiedepositionen.

Als beste der drei Methoden erwies sich das neuronale Netz, da die Güte der Selektion als einzige (fast) unabhängig von der Gesamtenergie (bzw. Strahlimpuls) und der Ereignistopologie ist. Bei gleicher Effizienz richtiger Klassifizierung von Photonen werden bis zu 7% mehr Fluktuationen, im Vergleich zu den anderen Methoden, erkannt. Die einfache Durchstimmbarkeit der Selektion erlaubt es die Effizienz zur Erkennung von Photonen zu 98% zu wählen und dabei trotzdem 92% aller Fluktuationen zu verwerfen. Eine hohe Effizienz für Photonen ist wichtiger als eine hohe Effizienz für Fluktuationen, da je nach Strahlimpuls, Ereignistyp und Wahl der Schwellen Photonen und Fluktuationen im Verhältnis zwischen 50 : 1 und 20 : 1 stehen. Die Güte des neuronalen Netzes bestätigt Abb. 3.5 für „rein neutrale“ Ereignisse mit vier, sechs und acht rekonstruierten Photonen.

[5] Diese ergibt sich aus Gl.(C.41), wenn jeder einzelne Kristall eines *Cluster*s als Photon betrachtet wird.

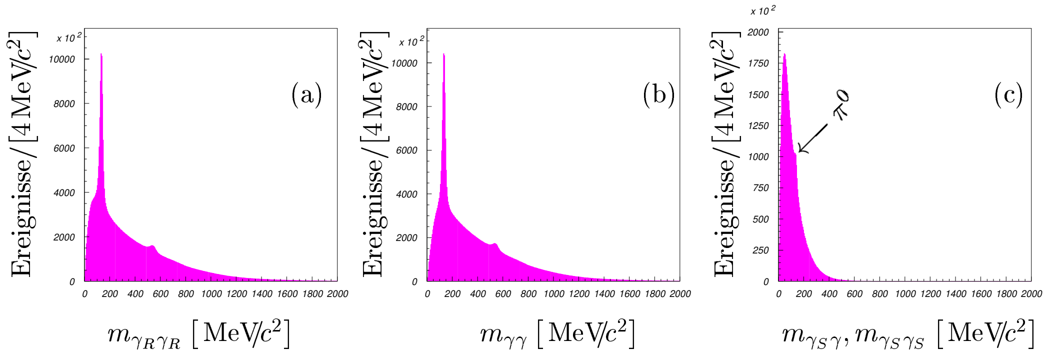

Abbildung 3.5: **Unterdrückung von Schauerfluktuationen.**
Die Spektren zeigen invariante Massen für zwei Photonen für γ^{n_γ}-Ereignisse ($n_\gamma = 4, 6, 8$).
(a) Ohne Unterdrückung.
(b) Mit der BRAIN-Methode.
(c) Das „unphysikalische“ Spektrum. Mindestens ein „Photon-Kandidat“ (γ_S) wurde von BRAIN als Fluktuation markiert.

Dargestellt sind invariante Massen für zwei Photonen. Das erste Spektrum (Abb. 3.5.a) wurde ohne Unterdrückung von Fluktuationen generiert, das mittlere Spektrum (Abb. 3.5.b) mit der *BRAIN*–Methode. Beide Spektren weisen ein dominantes π^0–Signal bei 135 MeV/c^2 und ein schwaches η–Signal auf. Mit *BRAIN* erscheint das π^0–Signal etwas schärfer. Die Überhöhung („linke Schulter") zu niedrigen Energien hin, ist auf Fluktuationen zurückzuführen, wie Monte Carlo–Studien belegen. Bei Einsatz des Netzes ist diese Überhöhung nicht mehr vorhanden. Das Spektrum 3.5.c zeigt nur „Photonenpaare" bei denen mindestens eines der beiden als Fluktuation markiert wurde. Die hohe Effizienz des Netzwerkes „echte" Photonen auch als solche zu erkennen, führt dazu, daß kein η–Signal und nur ein verschwindend geringes π^0–Signal im Spektrum 3.5.c zu erkennen sind.
Trotz der hohen Güte der *BRAIN*–Methode, wurde bei der Rekonstruktion der in dieser Arbeit vorgestellten Endzustände $\pi^0\pi^0\pi^0 \rightarrow 6\gamma$ und $\eta\eta\pi^0 \rightarrow 6\gamma$ auf die Methode verzichtet. Der Untergrund durch Fluktuationen konnte in diesen Fällen allein durch die kinematische Anpassung mit Nebenbedingungen auf ein zu vernachlässigendes Niveau reduziert werden.
Eine solche Reduktion gelingt nicht bei Endzuständen mit geladenen Teilchen. Hier treten, insbesondere bei der Annihilation im Fluge, große Impulse der geladenen Teilchen auf, die mit einem großen Meßfehler behaftet sind. Dadurch ist es sehr wahrscheinlich, daß eine kinematische Anpassung trotz falscher Photonenmultiplizität[6] konvergiert. Erschwerend kommt hinzu, daß auch die geladenen Teilchen Energie im Kalorimeter deponieren und dadurch Gruppen von Kristallen (*Cluster*) ansprechen, aber nicht in die Gesamtbilanz einfließen dürfen. Die meisten jener *Cluster* lassen sich eindeutig durch Extrapolation der mit der *JDC* gemessenen Teilchenbahnen auf die Stirnfläche der Kristalle identifizieren (sogenannte *matched tracks*). Dazu wird ein Kegel mit 11° Öffnungswinkel um die Verbindung zwischen Annihilationsvertex und Kristall–Stirnfläche definiert. Alle Energiedepositionen die innerhalb des Kegels liegen werden dem geladenen Teilchen zugeschrieben. Geladene Pionen und Kaonen können im Gegensatz zu Photonen auch stark mit den $CsI(Tl)$–Kristallen oder anderen Materialien im Detektor wechselwirken. Die dabei entstehenden Fragmente (zum Beispiel Neutronen) erzeugen ebenfalls *Cluster*, beziehungsweise lokale Maxima (*PED*), die weit vom Ort der primären Wechselwirkung entfernt sind. Eine Simulation dieser sogenannten „hadronischen Split-Offs" erwies sich als äußerst schwierig. Erst ab einer Mindestenergie von 13 MeV im Zentralkristall ist dies möglich, da unterhalb dieser Schwelle die Zahl der „hadronischen Split-Offs" bei dem zur Verfügung stehenden Simulationspaket *FLUKA*[7] stark von der Schwellenenergie abhängt. Daher wurden zur Selektion der $C^+C^-\gamma^{n_\gamma}$-Ereignisse die Schwellenenergien E_{SC} und E_{SP} zu 20 MeV gewählt. Die Identifizierung der verbleibenden hadronischen Fluktuationen, (mit Energien oberhalb von 20 MeV) ist sehr viel schwieriger als im elektromagnetischen Fall, da die Korrellation zwischen dem Ort der ursächlichen Reaktion und des *Split-Offs* gering ist. Speziell zur Unterdrückung hadronischer Fluktuationen wurden innerhalb der Crystal Barrel Gruppe mehrere Methoden unabhängig voneinander entwickelt:

- *TAXI*[34] beruht auf einer Modifizierung der *Cluster*, die einem geladenen Teilchen zugeordnet wurden. Für diese *Cluster* werden auch die übernächsten Nachbarkristalle mit einer Energie oberhalb der Schwelle E_{SN} mit in das *Cluster* einbezogen.

- *JHONNY WALKER* [35] ist ein neuronales Netz, das als Eingabegrößen sowohl Meßgrößen des Kalorimeters als auch der Spurrekonstruktion verwendet.

[6]Fluktuation erhöhen die Multiplizität eines Ereignisses.
[7]Das Simulationspaket *GEISHA* konnte die hadronischen Wechselwirkungen bei niedrigen Energien gar nicht beschreiben.

- *CBDROP* [36] ist eine kinematische Anpassung unter Berücksichtigung der Erhaltung der Gesamtenergie und und des Gesamtimpulses eines Ereignisses. Durch sukzessive Herausnahme eines oder mehrerer Photonkandidaten (in der Praxis maximal zwei, bedingt durch die lange Rechenzeit) wird ein Optimum ermittelt.

- *GDROP* [37] ist eine Erweiterung von *CBDROP*, allerdings ohne kinematische Anpassung. *GDROP* maximiert eine *Fitness*–Funktion mit Hilfe eines genetischen Algorithmus. In die *Fitness*–Funktion gehen die Anzahl der Photonen, die Energie– und Impulserhaltung, alle invarianten Massen aus zwei Photonenkandidaten (zum Test auf die Hypothesen $\pi^0, \eta \to \gamma\gamma$) und aus drei Photonenkandidaten (zum Test auf die Hypothese $\omega \to \pi^0\gamma \to \gamma\gamma$) sowie alle Meßfehler ein.

- *BRAIN* [27, 28] Obwohl dieses neuronale Netz nur mit Fluktuationen elektromagnetischer Schauer trainiert wurde, eignet es sich, dank der hohen Effizienz zur Identifizierung von Photonen, auch zur Erkennung hadronischer Fluktuationen.

CBDROP ist aufgrund der im Vergleich zur Annihilation in Ruhe kurzen, schlecht gemessenen Spuren geladener Teilchen nicht für die Annihilation im Fluge geeignet. *JHONNY WALKER* kam nicht zum Einsatz, da dieses neuronale Netz zur Anreicherung und eindeutiger Identifizierung hadronischer Fluktuationen nur mit Ereignissen geringer Photonenmultiplizität ($n_\gamma = 0, 2$) trainiert wurde. Entsprechend schlecht ist die Effizienz Photonen richtig zu klassifizieren, insbesondere für Ereignisse mit höheren Multiplizitäten. *TAXI* wurde mit Hilfe von „kollinearen" $\pi^+\pi^-$-Ereignissen der Annihilation in Ruhe optimiert und ist vollkommen ungeeignet zur Selektion von $C^+C^-\gamma^{n_\gamma}$-Ereignissen der Annihilation im Fluge, wie Abbildung 3.6 belegt. Das invariante Massenspektrum der verworfenen Photonenkandidaten sieht genauso aus wie das „physikalische" Spektrum. Bei näherer Betrachtung ist außer dem verworfenen π^0-Signal, sogar noch ein η-Signal zu erkennen. Die besten Ergebnisse, im Sinne von hoher Effizienz zur Erkennung von Fluktuationen

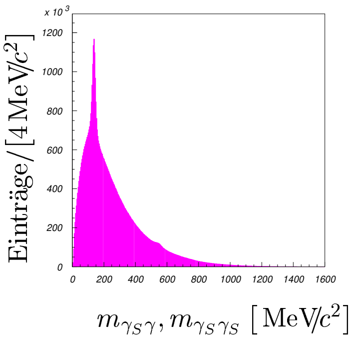

Abbildung 3.6: **Unterdrückung von Schauerfluktuationen mit TAXI.** *Gezeigt ist das invariante Massenspektrum zweier Photonen, wobei mindestens eines von TAXI als Fluktuation markiert wurde. Das Spektrum ähnelt stark dem „physikalischen" Spektrum in Abb. 3.7.b.*

und Photonen, werden bei gleichzeitiger Verwendung von *GDROP* und *BRAIN* erreicht. Trotzdem wurde für die Selektion der Ereignisse mit zwei geladenen Teilchen nur die *BRAIN*-Methode verwendet, da, unabhängig von der gewählten Methode, alle Ereignisse einer „echten" kinematischen Anpassung mit Nebenbedingungen unterzogen werden. Niederenergetischen Fluktuationen können nur durch das Anheben der Schwellen verworfen werden, da keine der Methoden in der Lage ist, diese richtig zu klassifizieren. Das Ergebnis einer solchen Selektion zeigt Abb. 3.7 für Ereignisse der September 1995 Datennahme mit zwei geladenen Teilchen und zwei bis sechs Photonen.

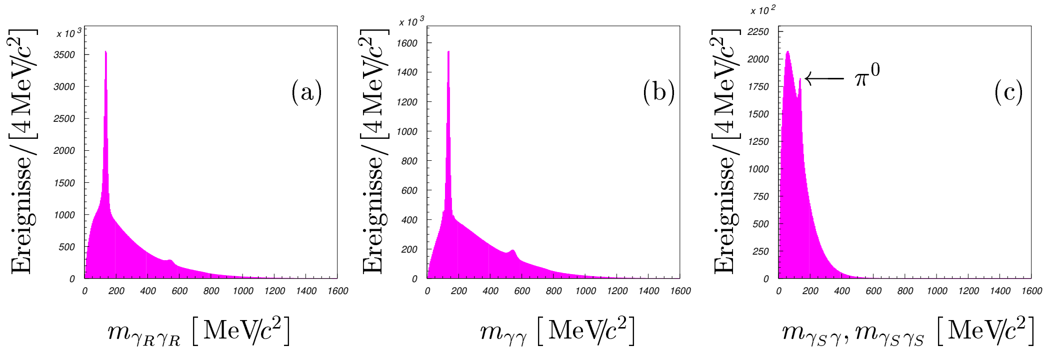

Abbildung 3.7: **Unterdrückung von Schauerfluktuationen für Ereignisse mit zwei geladenen Teilchen.**
Die Spektren zeigen invariante Massen zweier Photonen für $C^+C^-\gamma^{n_\gamma}$–Ereignisse, wobei $n_\gamma = 2, \cdots, 6$.
(a) Ohne Unterdrückung.
(b) Mit der BRAIN-Methode.
(c) Das „unphysikalische“ Spektrum. Mindestens ein „Photon-Kandidat“ (γ_S) wurde von BRAIN als Fluktuation markiert.

3.3 Präparation der Endzustände mit sechs Photonen

Die Präparation der „rein neutralen mesonischen“ Endzustände $\pi^0\pi^0\pi^0$ und $\eta\eta\pi^0$ wurde bereits für frühere Partialwellenanalysen [29, 38] durchgeführt. Der $\eta\eta\pi^0$–Datensatz entstand aus der Datennahmen im Juli 1992 und im August 1994 bei einem Antiprotonen–Strahlimpuls von 1940 MeV/c. Der $\pi^0\pi^0\pi^0$–Datensatz ist eine Untermenge der bei einem Strahlimpuls von 600 MeV/c aufgezeichneten Daten aus dem April 1993. Beide „mesonischen“ Endzustände wurden aus 6γ–Ereignissen ausgewählt, für die dieselben Selektionskriterien benutzt wurden:

- Keine geladenen Teilchen wurden nachgewiesen.
- Die Schwellenenergien für das Kalorimeter werden zu $E_{SR} = 1\,\text{MeV}$, $E_{SC} = 20\,\text{MeV}$ und $E_{SP} = 20\,\text{MeV}$ gewählt.
- Keines der in Kap.3.2.1 beschriebenen Verfahren zur Unterdrückung von Schauerfluktuationen wurde benutzt, daher sollen alle Ereignisse genau sechs *PED*s besitzen.

Datennahme		σ^2_ϕ	σ^2_θ	$\sigma^2_{\sqrt{E_\gamma}}$
$\bar{p}$(1940 MeV/c) $\rightarrow \eta\eta\pi^0$	Juni 1994	1,18	1,00	0,97
	August 1994	1,40	1,10	1,00
	Monte Carlo	1,57	1,20	1,02
$\bar{p}$(600 MeV/c) $\rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$	April 1993	1,00	1,00	0,80
	Monte Carlo	1,40	1,00	0,80

Tabelle 3.2: **Skalierungsfaktoren der Meßfehler für ϕ, θ und $\sqrt{E_\gamma}$.**
Die Quadrate der Meßfehler (σ^2) wurden mit den angegebenen Faktoren skaliert.

„mesonischer“ Endzustand	$CL_{\pi^0\pi^0\pi^0}$	$CL_{\pi^0\pi^0\eta}$	$CL_{\pi^0\eta\eta}$	$CL_{\eta\eta\eta}$	Ereignisse 1940 MeV/c	Ereignisse 600 MeV/c
$\pi^0\pi^0\pi^0$	$> 10\%$	$< 10^{-3}$	-	-	197.017	**39.655**
$\pi^0\pi^0\eta$	$< 10^{-5}$	$> 10\%$	-	-	95.286	8.637
$\pi^0\eta\eta$	$< 10^{-5}$	$< 10^{-5}$	$> 10\%$	$< 10^{-1}$	**5.831**	903
$\eta\eta\eta$	$< 10^{-5}$	$< 10^{-5}$	$< 10^{-5}$	$> 10\%$	473	4

Tabelle 3.3: **Zuordnung der 6γ-Ereignisse zu „mesonischen“ Endzuständen.** *Die Tabelle zeigt die oberen bzw. unteren Schwellenwerte für das Konfidenzniveau (CL) der jeweiligen Hypothese zur Selektion des in der ersten Spalte angegebenen Endzustandes.*

- Der z–Vertex soll im Bereich $-5\text{cm} < z < 5\text{cm}$ liegen.

Für die so definierten 6γ–Ereignisse wurden kinematische Anpassungen mit Massenhypothesen und freiem z–Vertex zu den Hypothesen 6γ, $\pi^0\pi^0\gamma\gamma$, $\pi^0\eta\gamma\gamma$, $\pi^0\pi^0\pi^0$, $\pi^0\pi^0\eta$, $\eta\eta\pi^0$ und $\eta\eta\eta$ vorgenommen. Die vier letztgenannten Hypothesen haben sechs Zwangsbedingungen. Durch wiederholte Anpassung der Hypothesen und Betrachtung der Konfidenzniveau– und *pull*–Verteilungen, wurden die in Tabelle 3.2 gegeben Skalierungsfaktoren für die Meßfehler in θ, ϕ und $\sqrt{E_\gamma}$ gefunden. Mit diesen Skalierungsfaktoren sind die Konfidenzniveau–Verteilungen gleichverteilt und die *pulls*[8] sind normalverteilt. Mit den in Tabelle 3.3 gegebenen Bedingungen an die Konfidenzniveaus (CL[9]) der kinematischen Anpassungen mit Massenhypothesen und freien z–Vertex werden die Ereignisse den „mesonischen“ Endzuständen zugeordnet.

3.3.1 Präparation der Reaktionen $\bar{p}\,(1940\,\text{MeV/}c)\,p \to \eta\eta\pi^0 \to 6\gamma$

Aus insgesamt über zehn Millionen Ereignissen der Antiproton–Proton–Annihilation bei 1940 MeV/c $\bar{p}$-Strahlimpuls wurden 5.831 $\eta\eta\pi^0$–Ereignisse rekonstruiert. Dazu wurden die in Tabelle 3.3 gegebenen Anforderungen an die Konfidenzniveaus verschiedener kinematischer Anpassungen verwendet. Anhand simulierter Ereignisse (Tab. 3.4) wurde die Gesamtrekonstruktionseffizienz zu $23,5\%$ bestimmt. Ebenfalls mit Monte Carlo–Ereignissen

[8] *pulls*: „Verschiebungen“ der Meßgrößen (siehe [72])
[9] *CL*: *Confidence Level*

zugeordnet	**simulierter Endzustand (Monte-Carlo)** $\pi^0\pi^0\pi^0$	$\pi^0\pi^0\eta$	$\pi^0\eta\eta$	$\eta\eta\eta$	$\omega\omega$
$\pi^0\pi^0\pi^0$	**26,6%**	$6\cdot10^{-5}$	$2\cdot10^{-4}$	$3\cdot10^{-5}$	$5\cdot10^{-3}$
$\pi^0\pi^0\eta$	$6\cdot10^{-4}$	**29,5%**	$1\cdot10^{-3}$	$6\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-2}$
$\pi^0\eta\eta$	$3\cdot10^{-5}$	$4\cdot10^{-5}$	**23,5%**	$1\cdot10^{-3}$	$3\cdot10^{-4}$
$\eta\eta\eta$	$<1\cdot10^{-5}$	$1\cdot10^{-5}$	$1\cdot10^{-4}$	**25,2%**	$1\cdot10^{-5}$

Tabelle 3.4: **Rekonstruktionseffizienzen und Fehlzuordnungsraten für den 6γ–Endzustand.** *Für jeden der vier Endzustände mit drei neutralen, pseudoskalaren Mesonen wurden ca. 100.000 Ereignisse simuliert und demselben Rekonstruktionsverfahren wie für die gemessenen Ereignissen unterworfen.*

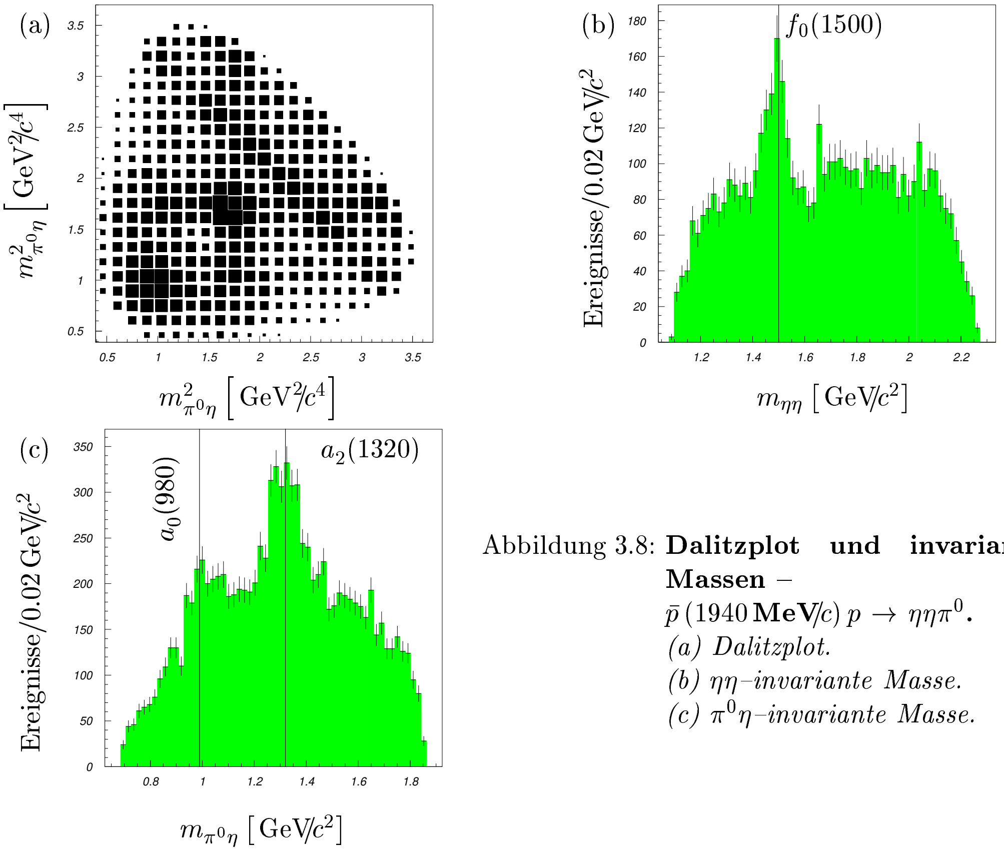

Abbildung 3.8: **Dalitzplot und invariante Massen –** $\bar{p}\,(1940\,\mathbf{MeV/}c)\,p \rightarrow \eta\eta\pi^0$**.**
(a) Dalitzplot.
(b) $\eta\eta$–invariante Masse.
(c) $\pi^0\eta$–invariante Masse.

wurde der Anteil von Fehlzuordnungen von Endzuständen gleicher Photonenmultiplizität (Tab. 3.4) ermittelt. Dieser liegt zwischen $3 \cdot 10^{-5}$ für den etwa vierzig mal häufigeren $\pi^0\pi^0\pi^0$–Endzustand und 10^{-3} für den etwa zehn mal selteneren $\eta\eta\eta$–Endzustand. Genauso verhält es sich mit Ereignissen mit niedrigerer Photon–Multiplizität (Tab. 3.5, Spalte 5γ), bei denen eine Schauerfluktuation aufgetreten ist. Dies bestätigt, daß spezielle Methoden zur Unterdrückung von Schauerfluktuationen in diesem Fall nicht notwendig sind. Ereignisse mit höherer Photon–Multiplizität, bei denen ein oder zwei Photonen verloren gegangen sind, weisen ebenfalls nur einen geringen Anteil an Fehlzuordnungen auf. (Tabelle 3.5, Spalte 7γ und Spalte 8γ). Insgesamt ist daher der zu erwartende Anteil an Untergrund–Ereignissen im $\pi^0\eta\eta$–Endzustand deutlich geringer als 1%. Abbildung 3.8 zeigt den Dalitzplot und die invarianten Massenspektren der 5.831 Datenereignisse. Der Dalitzplot (Abb. 3.8.a) enthält zwei Einträge pro Ereignis, da es zwei nicht unterscheidbare $\pi^0\eta$-Kombinationen gibt. Auf den ersten Blick sind drei Resonanzen zu erkennen: senkrecht zur Diagonalen im Dalitzplot ein dominantes Signal in der $\eta\eta$-invarianten Masse (Abb. 3.8.b); das $f_0(1500)$. Desweiteren sind in der $\pi^0\eta$-invarianten Masse (Abb. 3.8.c) klare Signale der bekannten Mesonen $a_0(980)$ und $a_2(1320)$ zu sehen. Das $a_2(1320)$ erscheint auch als mittig zentriertes Kreuz im Dalitzplot. Die große Intensität in der linken unteren Ecke des Dalitzplots überdeckt das $a_0(980)$–Signal und deutet auf mindestens eine weitere schwere $\eta\eta$–Resonanz bei invarianten $\eta\eta$–Massen über $1,9\,\mathrm{GeV}/c^2$ hin. Auch bei hohen $\pi^0\eta$-invarianten Massen läßt sich eine Anhäufungen bei ca. $1,65\,\mathrm{GeV}/c^2$ vermuten.

3.3.2 Präparation der Reaktionen $\bar{p}\,(600\,\mathbf{MeV/}c)\,p \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0 \rightarrow 6\gamma$

Für den $\pi^0\pi^0\pi^0$–Datensatz bei 600 MeV/c Strahlimpuls wurde in gleicher Weise verfahren wie für den $\pi^0\eta\eta$–Datensatz bei 1940 MeV/c. Hier reichen bereits zwei Selektionskriterien für die Konfidenzniveaus der kinematischen Anpassungen aus, um den Untergrund an Ereignissen der gleichen Multiplizität zu reduzieren (Tab. 3.3):

- $CL_{\pi^0\pi^0\pi^0} > 10\%$
- $CL_{\pi^0\pi^0\eta} < 0,1\%$

Auch hier wurde mit Hilfe von Monte Carlo–Ereignissen der Anteil der Fehlzuordnungen anderer Kanäle bestimmt. Für die Endzustände $\pi^0\pi^0\eta$, $\eta\eta\pi^0$, $\eta\eta\eta$ und $\eta\omega$ ist dieser in der Größenordnung kleiner als 10^{-4}. Da der $\pi^0\pi^0\pi^0$–Endzustand einer der häufigsten rein neutralen Endzustände bei diesem Strahlimpuls ist, ist der zu erwartende Anteil an Untergrundereignissen noch geringer. Nur der Anteil von $2 \cdot 10^{-3}$ an Fehlzuordnungen des ebenfalls häufigen $\pi^0\omega$-Endzustandes bereitet Probleme. Da das neuronale Netz *BRAIN* nicht zur Anwendung kam, mußte der Anteil der Untergrundereignisse des Typs $\pi^0\omega\gamma_S$ mit zusätzlichen Anforderungen eliminiert werden. Dazu wurden die Ergebnisse einer kinematischen Anpassung zur Hypothese $\pi^0\pi^0\gamma\gamma$ benutzt[10] und folgende Eigenschaften gefordert:

- Liegt die invariante Masse eines $\pi^0\gamma$–Paares in einer Umgebung der ω–Masse ($700\,\mathrm{MeV}/c^2 \leq m_{\pi^0\gamma} \leq 820\,\mathrm{MeV}/c^2$), dann darf die Energie des Photons, das nicht zum Paar gehört, nicht kleiner als 40 MeV/c^2 sein.
- Ist die invariante Masse eines $\pi^0\gamma$-Paares kleiner als 160 MeV/c^2, dann wird das Ereignis verworfen.

Die Gesamtrekonstruktionseffizienz für $\pi^0\pi^0\pi^0$–Ereignisse ändert sich durch diese beiden Selektionskriterien nur um 2%, von 34,6% auf 32,6%. Der Anteil der Fehlzuordnungen von $\pi^0\omega$–Ereignissen sinkt hingegen um etwa zwei Drittel auf $8,3 \cdot 10^{-4}$. Auf diese Weise, wurden aus ca. drei Millionen Ereignissen 39.655 $\pi^0\pi^0\pi^0$–Ereignisse selektiert, die in Abb. 3.9 dargestellt sind. Der Dalitzplot enthält sechs Einträge pro Ereignis, da es drei Möglichkeiten gibt $\pi^0\pi^0$–Paare zu bilden, für die es, wegen der Ununterscheidbarkeit der neutralen Pionen, jeweils zwei Kombinationen gibt. Sowohl im Dalitzplot (Abb. 3.9.a)

[10] Die kinematische Anpassung zur Hypothese $\pi^0\pi^0\gamma\gamma$ konvergiert stets, wenn sie auch für die Hypothese $\pi^0\pi^0\pi^0$ konvergent ist, da letztere Hypothese eine Zwangsbedingung mehr besitzt.

	simulierter Endzustand (Monte-Carlo)				
Multiplizität	5γ		8γ	7γ	
	$\pi^0\omega$	$\eta\omega$	$\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$	$\pi^0\pi^0\omega$	$\pi^0\eta\omega$
Ereignisse	30.000	30.000	50.000	100.000	100.000
zugeordnet					
$\pi^0\pi^0\pi^0$	$4 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-5}$
$\pi^0\pi^0\eta$	$1 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-4}$
$\pi^0\eta\eta$	$3 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$< 1 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-3}$
$\eta\eta\eta$	$< 1 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$< 1 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 3.5: **Fehlzuordnungsraten von Endzuständen mit anderen Photon–Multiplizitäten zu 6γ–Endzuständen.**

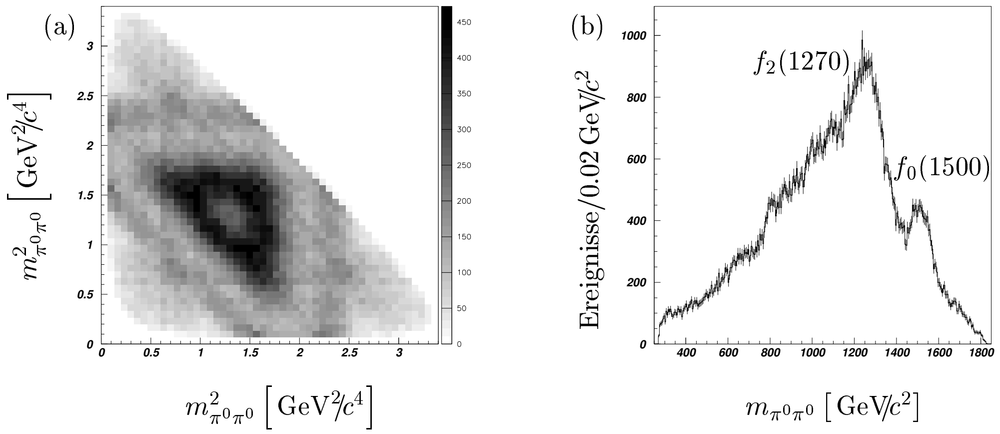

Abbildung 3.9: **Dalitzplot und invariante Masse** – $\bar{p}$ **(600 MeV/c)** $p \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0 \rightarrow 6\gamma$**.**
(a) Der Dalitzplot (sechs Einträgen pro Ereignis).
(b) Die invariante $\pi^0\pi^0$–Masse.

als auch in der invarianten $\pi^0\pi^0$–Masse (Abb. 3.9.b) sind nur die Signale der $f_2(1270)$–Resonanz und der $f_0(1500)$–Resonanz zu erkennen. Die Akzeptanzeinbuße in der Nähe der $\pi^0\eta$–Schwelle (bei $0,47\,\mathrm{GeV}^2/c^4$ im Dalitzplot, beziehungsweise bei $0,685\,\mathrm{GeV}/c^2$ in der invarianten $\pi^0\pi^0$–Masse) ist auf das restriktive Selektionskriterium gegen Ereignisse des Typs $\pi^0\pi^0\eta$ zurückzuführen.

3.4 Präparation der Reaktionen $\bar{p}p \rightarrow (C^+C^-)^{n_c}\gamma^{n_\gamma}$

Der $K^+K^-\pi^0$–Datensatz wurde aus fast sechzig Millionen Ereignissen extrahiert, die im September 1995 aufgezeichnet wurden. Dabei wurde ein sogenannter „mixed trigger" verwendet, der sowohl auf Ereignisse mit zwei geladenen Teilchen, als auch auf rein neutrale Ereignissse ansprach[11]. Bei einer so großen Datenmenge war es technisch nicht möglich,

[11]Vgl. dazu Tab. 2.1 in Kapitel 2.2.5. Mit einem Trigger auf Ereignisse mit genau zwei geladenen Teilchen konnten die Ereignisse mit einer Rate von 50 Hz auf *DLT*–Magnetbänder geschrieben werden. Für rein

Kriterium	Ereignisse
Physikalische $\bar{p}(1940\,\mathrm{MeV}/c)p$–Ereignisse:	48.233.000
Ereignisse mit mindestens zwei Teilchen:	47.374.000
Ereignisse mit höchstens elf Teilchen:	42.699.000
Ereignisse mit genau zwei geladenen Teilchen:	30.754.000
Die Drahtlage des ersten Spurpunktes in der *JDC* ist kleiner als fünf:	26.822.000
Die Anzahl der Spurpunkte ist mindestens zwei:	26.822.000
Die Vertexanpassung ist erfolgreich und die Summe der Ladungen ist null:	22.160.000

Tabelle 3.6: **Vorselektion der $(C^+C^-)^{n_c}\gamma^{n_\gamma}$–Ereignisse.**

Kriterium	Ereignisse				
	$C^+C^-2\gamma$	$\pi^+\pi^-3\gamma$	$\pi^+\pi^-4\gamma$	$\pi^+\pi^-5\gamma$	$\pi^+\pi^-6\gamma$
$n_\gamma = n_{PED}$	1.413.900	2.187.100	3.569.800	3.797.200	3.843.900
$n_\gamma = n_{BRAIN}$	1.680.700	2.552.500	3.930.300	3.976.100	3.758.100
$\lvert E_{\mathrm{tot}} - E_{\mathrm{lab}}\rvert \leq 400\,\mathrm{MeV}$ †	546.490	874.140	1.917.100	1.935.800	2.138.200
$\lvert \overrightarrow{p_{\mathrm{tot}}} - \overrightarrow{p_{\mathrm{lab}}}\rvert \leq 400\,\mathrm{MeV}$ †	525.020	840.530	1.865.700	1.867.900	2.058.000

Tabelle 3.7: **Aufspaltung nach Photonmultiplizitäten der** $(C^+C^-)^{n_c}\gamma^{n_\gamma}$**–Ereignisse.**
† *Für Ereignisse mit zwei Photonen wurde die gemessenen Gesamtenergie* E_{tot} *und der gemessene Gesamtimpuls* $\overrightarrow{p_{tot}}$ *jeweils mit zwei Massenhypothesen für die geladenen Teilchen berechnet (*$C = \pi$ *oder* $C = K$*), und nur jeweils eine von beiden Bilanzen mußte den Bedingungen genügen.*

zur Präparation eines Ereignistyps alle Ereignisse wiederholt zu rekonstruieren, wie es bei den rein neutralen Ereignissen im vorherigen Abschnitt möglich war. Die Auswertung der Driftkammerdaten braucht eine Größenordnung mehr Rechenzeit als die der Kalorimeterdaten. Daher dauerte der (einzige) Durchlauf über alle Daten fast vier Monate, wohingegen ein Durchlauf über alle zehn Millionen Ereignisse für den $\eta\eta\pi^0$–Datensatz an einem Wochenende durchgeführt werden konnte. Aus diesem Grund wurden die Ereignisse zunächst nach Photon–Multiplizitäten aufgespalten, wobei die Selektionskriterien so offen gewählt wurden, daß keine vollständigen Ereignisse verloren gehen konnten. Die Selektionkriterien und die Selektionshistorie zeigen Tab. 3.6, Tab. 3.7 und Tab. 3.8. Die

neutrale Ereignisse lag diese Rate bei maximal 17 Hz. Da insgesamt mit einer Rate von bis zu 70 Hz Ereignisse aufgezeichnet werden konnte, bot sich die Verwendung eines „*mixed trigger*“ an, zumal die rein neutralen Ereignisse zur Kalibration des Kalorimeters zwingend erforderlich sind.

Kinematische Anpassung (4*C*-Phasenraumfit)

Kriterium	Ereignisse				
	$C^+C^-2\gamma$	$\pi^+\pi^-3\gamma$	$\pi^+\pi^-4\gamma$	$\pi^+\pi^-5\gamma$	$\pi^+\pi^-6\gamma$
$CL_{4\mathrm{C}} > 1\%$	306.610	345.000	931.090	642.090	803.410
$CL_{4\mathrm{C}} > 10\%$	210.930	211.830	620.840	391.770	518.570

Kinematische Anpassung mit Massenhypothesen

$CL_{\mathrm{hypo}} > 10\%$	$\pi^+\pi^-\pi^0$	$\pi^+\pi^-\omega\pi^0$	$\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$	$\pi^+\pi^-\omega$	$\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0\pi^0$
	151.580	29.355	390.150	71.822	287.200
$CL_{\mathrm{hypo}} > 10\%$	$\pi^+\pi^-\eta$		$\pi^+\pi^-\pi^0\eta$		$\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0\eta$
	28.858		75.194		52.487

Tabelle 3.8: **Aufspaltung nach „mesonischen“ Endzuständen der** $(C^+C^-)^{n_c}\gamma^{n_\gamma}$**-Ereignisse.**
Kinematische Anpassungen wurden bei der Vorselektion nur vorgenommen, um einen ersten Überblick über physikalisch interessante „mesonische“ Endzustände zu bekommen.

$C^+C^-2\gamma$–Selektionskriterien

Kriterium	Ereignisse
Ereignisse der allgemeinen Vorselektion	525.020
• genau zwei zugeordnete *PED*'s • Drahtlage des ersten Spurpunktes in der *JDC* kleiner als 3 • Anzahl der Spurpunkte mindestens 11 • Abstand des Annihilationspunktes vom Targetmittelpunkt in Strahlrichtung $\lvert v_z \rvert < 24\,\mathrm{mm}$ • Abstand des Annihilationspunktes von der Strahlachse $\lvert v_{xy} \rvert < 6\,\mathrm{mm}$ • $\lvert p_z - 1940\,\mathrm{MeV/c} \rvert < 400\,\mathrm{MeV/c}$ • $\left\lvert \overrightarrow{p_{xy}} \right\rvert < 200\,\mathrm{MeV/c}$ • $\lvert m_{\gamma\gamma} - m_{\pi^0} \rvert < 45\,\mathrm{MeV/c^2}$ oder $\lvert m_{\gamma\gamma} - m_\eta \rvert < 100\,\mathrm{MeV/c^2}$ oder $\lvert m_{\gamma\gamma} - m_{\eta'} \rvert < 100\,\mathrm{MeV/c^2}$	
Anzahl der selektierten Ereignissse	261.697

Kinematische Anpassung mit Massenhypothesen

$CL_{\mathrm{hypo}} > 1\%$	$\pi^+\pi^-\pi^0$	$\pi^+\pi^-\eta$	$\pi^+\pi^-\eta'$	$K^+K^-\pi^0$	$K^+K^-\eta$
	155.562	32.360	1306	10.351	840
$CL_{\pi^+\pi^-M} > 1\%$ und $CL_{K^+K^-M} > 1\%$	3074	42	0	3074	42
$CL_{\pi^+\pi^-M} > 10\%$ und $CL_{\pi^+\pi^-M} > 2 \cdot CL_{K^+K^-M}$	113.350	22.156	707		
$CL_{K^+K^-M} > 10\%$ und $CL_{K^+K^-M} > 2 \cdot CL_{\pi^+\pi^-M}$				5755	554
Schnitt aus Gl. (3.11) auf $m_{C^\pm}$	113.350	22.156	707	4.290	419

Tabelle 3.9: **Selektionkriterien für $C^+C^-\gamma^{n_\gamma}$–Ereignisse.**

Ergebnisse dieser Vorselektion wurden in einer eigens dafür entwickelten, einfachen Datenbank (*BiFile*[12]) festgehalten. In einem zweiten Durchlauf wurden die Ereignisse nur an Hand ihrer Nummer, ohne vollständige Rekonstruktion, physikalisch (auf unterschiedlichen Magnetbändern) nach Photon-Multiplizitäten getrennt. Dabei wurden die Ergebnisse der kinematischen Anpassungen nicht berücksichtigt.

3.4.1 $\bar{p}(1940\,\mathrm{MeV/c})p \rightarrow C^+C^-2\gamma$

Die weitere Spezifizierung der $C^+C^-2\gamma$–Ereignisse nach „mesonischen" Endzuständen vom Typ C^+C^-M (mit $M = \pi^0, \eta, \eta'$ und $C = K, \pi$) ist in [39] ausführlich beschrieben. Dazu wurde zunächst der $C^+C^-2\gamma$–Datensatz mit 525.020 Ereignissen aus der allgemeinen Vorselektion (erste Spalte von Tab. 3.7) weiter reduziert. Um den Untergrund an falsch selektierten Ereignissen möglichst gering zu halten, müssen vor allen an die gemessenen Spuren der geladenen Teilchen stärkere Bedingungen gestellt werden, da die Meßfehler sehr kurzer Spuren (weniger als elf Spurpunkte) nicht mehr akzeptabel sind [13]. Außerdem

[12] *BiFile* (*Binary File*): In einem 32 bit-Maschinenwort werden die *Run*–Nummer und die *Event*–Nummer gespeichert. In einem weiteren 32 bit–Wort wird für jedes erfüllte Kriterium (auch für die kinematische Anpassungen) ein bit gesetzt.

[13] Bei Analysen der Proton–Antiproton Annihilation in Ruhe werden zumeist sehr lange Spuren (mit ca. zwanzig Spurpunkten) verlangt, wobei die Spuren außerdem in den inneren Drahtlagen der *JDC* beginnen

wird eine eindeutige Zuordnung der Energiedeposite geladener Teilchen zu den Spuren verlangt. Zudem wurde der Datensatz durch Schnitte auf die invarianten Masse der beiden Photonen auf die Mesonen π^0, η und η' eingeschränkt. Die Schnitte sind in der oberen Hälfte von Tabelle 3.9 zusammengefaßt. Die verbleibenden 261.697 Ereignesse wurden mittels kinematischer Anpassungen mit Massenhypothesen den Endzuständen $\pi^+\pi^-\pi^0$, $\pi^+\pi^-\eta$, $\pi^+\pi^-\eta'$, $K^+K^-\pi^0$ und $K^+K^-\eta$ zugeordnet. Die untere Hälfte von Tab. 3.9 zeigt die Ergebnisse. Dabei fällt auf, daß für mehr als ein Viertel der $K^+K^-\pi^0$–Ereignisse auch die Anpassung zur Massenhypothese $\pi^+\pi^-\pi^0$ konvergiert. Mit den Ergebnissen der Anpassungen wurde der in Abschnitt 3.1.1 diskutierte zweidimensionale Schnitt in der von $m^2_{C^\pm}$ und $\left|\overrightarrow{p_{\text{lab}}}\right|$ aufgespannten Ebene optimiert auf die Selektion der $K^+K^-\pi^0$–Ereignisse. Die Parametrisierung des Schnittes lautet:

$$\left(\frac{m_{C^\pm}}{\text{GeV}/c^2}\right)^2 \quad \leq \quad -2,05\left(\frac{\left|\overrightarrow{p_{\text{tot}}}\right|}{\text{GeV}/c}\right) + 4,09 \tag{3.11}$$

Diser Schnitt ist in Abbildung 3.10.a eingezeichnet. Für die auf diese Weise zugeordneten $K^+K^-\pi^0$–Ereignisse, ist zur Kontrolle in Abbildung 3.10.b der Energieverlust pro Längeneinheit gegen den Betrag des Impulses der Kaonen aufgetragen. Das Band der Pionen (vgl. Abb. 3.2) fehlt vollständig, obwohl der Energieverlust pro Längeneinheit nicht als Kriterium der Selektion diente. Die Rekonstruktionseffizienz und der Anteil der Fehlzuordnungen wurde mit Monte Carlo simulierten Ereignissen für fünf verschiedene mesonische Endzustände bestimmt, die aus den $C^+C^-2\gamma$–Ereignissen rekonstruiert wurden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3.10 zusammengefäßt. Dalitzplots und invariante Massen zu den hier nicht weiter diskutierten Endzuständen finden sich in [40] und [39].

und in den äußeren Drahtlagen enden sollen. Diese Forderungen schränken den aktiven Raumwinkel bei der Annihilation im Fluge (bis zu 1940 MeV/c) so stark ein, daß sich im Vergleich zu den hier verwendeten Kriterien die Anzahl der Ereignisse um zwei Größenordnungen verringern würde.

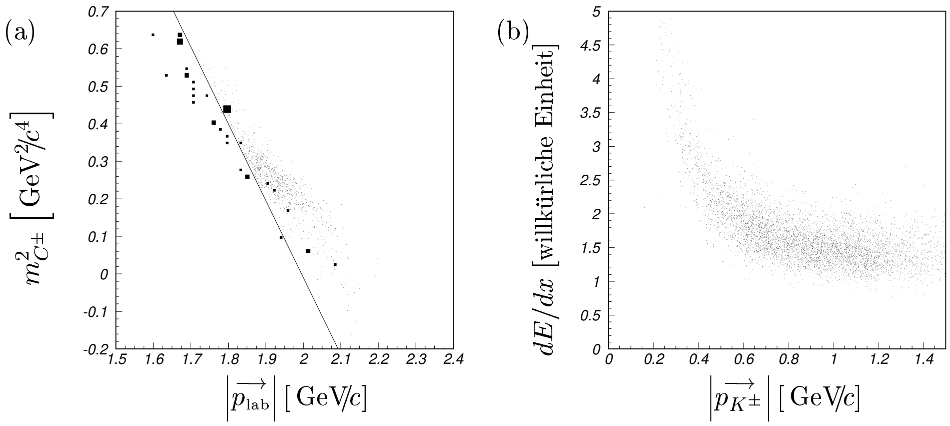

Abbildung 3.10: $K^\pm/\pi^\pm$**-Separation für** $C^+C^-2\gamma$**–Ereignisse.**
(a) $m^2_{C^\pm}$ *augetragen gegen* $\left|\overrightarrow{p_{lab}}\right|$ *für selektierte* $K^+K^-\pi^0$*-Ereignisse. Der Untergrund aus (simulierten)* $\pi^+\pi^-\pi^0$*-Ereignissen ist als Box eingetragen. Die Gerade markiert den Schnitt aus Gl. (3.11).*
(b) Energieverlustspektrum der selektierten $K^+K^-\pi^0$*-Ereignisse.*

	simulierter Endzustand (Monte-Carlo)				
	$\pi^+\pi^-\pi^0$	$\pi^+\pi^-\eta$	$\pi^+\pi^-\eta'$	$K^+K^-\pi^0$	$K^+K^-\eta$
Ereignisse	80.000	100.000	20.000	440.000	20.000
zugeordnet					
$\pi^+\pi^-\pi^0$	**3,24%**	$< 1 \cdot 10^{-5}$	$< 1 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$< 1 \cdot 10^{-5}$
$\pi^+\pi^-\eta$	$8,8 \cdot 10^{-5}$	**3,60%**	$< 1 \cdot 10^{-5}$	$< 1 \cdot 10^{-6}$	$< 1 \cdot 10^{-5}$
$\pi^+\pi^-\eta'$	$< 1 \cdot 10^{-5}$	$< 1 \cdot 10^{-5}$	**3,90%**	$< 1 \cdot 10^{-6}$	$< 1 \cdot 10^{-5}$
$K^+K^-\pi^0$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$< 1 \cdot 10^{-5}$	$< 1 \cdot 10^{-5}$	**1,33%**	$< 1 \cdot 10^{-5}$
$K^+K^-\eta$	$< 1 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$< 1 \cdot 10^{-5}$	$4,5 \cdot 10^{-6}$	**1.10 %**

Tabelle 3.10: **Rekonstruktionseffizienzen und Fehlzuordnungsraten für $C^+C^-2\gamma$-Endzustände.**

3.4.2 Präparation der Reaktionen $\bar{p}\,(1940\,\mathbf{MeV}/c)\,p \rightarrow K^+K^-\pi^0 \rightarrow K^+K^-2\gamma$

Wie aus Tabelle 3.10 zu ersehen, ist der Anteil der Fehlzuordnungen von $\pi^+\pi^-\pi^0$–Ereignissen zum $K^+K^-\pi^0$–Endzustand größer als für alle anderen Ereignistypen. Da zudem der $\pi^+\pi^-\pi^0$–Endzustand der häufigste aller fünf Endzustände ist, wird der Untergrund im $K^+K^-\pi^0$–Datensatz von $\pi^+\pi^-\pi^0$–Ereignissen dominiert. Die anderen Ereignistypen sind vernachlässigbar. Der Untergrund aus $\pi^+\pi^-\pi^0$–Ereignissen beträgt etwa 3%. Für die Analyse des $K^+K^-\pi^0$–Datensatzes ist es wichtig, ob dieser Untergrund Strukturen im Dalitzplot hervorruft, oder ob er gleichverteilt ist. Zu diesem Zweck wurden diejenigen Ereignisse, die beide Massenhypothesen mit einem Konfidenznivau von über 1% erfüllen, jeweils in einen $\pi^+\pi^-\pi^0$–Dalitzplot und eine $K^+K^-\pi^0$–Dalitzplot eingetragen (Abb. 3.11). Diese Ereignisse befinden sich jeweils in der linken unteren Ecke der Dalitzplots. In der Auftragungsweise von Abbildung 3.11 entsprechen senkrecht zur Diagonalen verlaufende

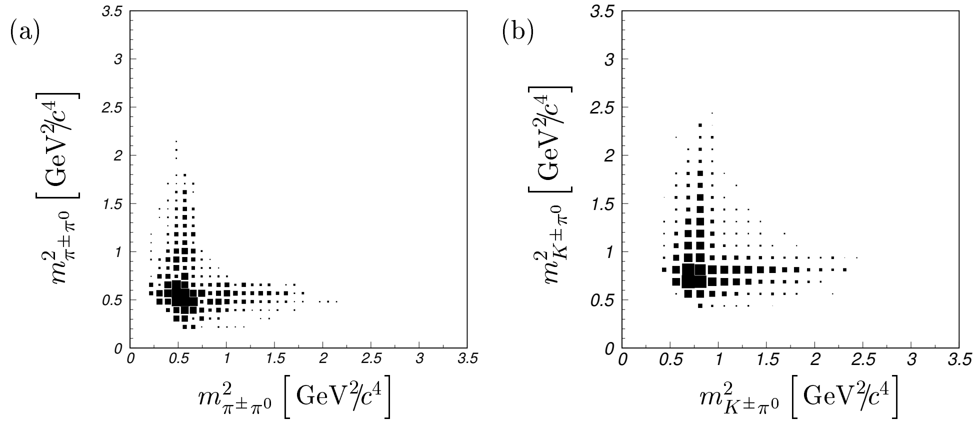

Abbildung 3.11: **Untergrund in den $K^+K^-\pi^0/\pi^+\pi^-\pi^0$–Daten.**
In beiden Dalitzplots sind Ereignisse eingetragen, bei denen sowohl die kinematische Anpassung zur Massenhypothesen $\pi^+\pi^-\pi^0$, als auch zur Hypothese $K^+K^-\pi^0$, ein Konfidenzniveau von über 1% besitzen.
(a) „Untergrund"-Dalitzplot für $\pi^+\pi^-\pi^0$-Ereignisse.
(b) „Untergrund"-Dalitzplot für $K^+K^-\pi^0$-Ereignisse.

Linien, Linien konstanter invarianter C^+C^--Massen, die um so kleiner werden, je weiter sie vom Ursprung entfernt sind. Also sind es gerade Ereignisse mit großen invarianten C^+C^-–Massen, die den Untergrund bestimmen. Dies war zu erwarten, da großen C^+C^-–Massen große Impulse der geladenen Teilchen entsprechen, die in Relation zu kleinen Impulsen nur schlecht gemessen wurden. Die Untergrundereignisse sind nicht gleichverteilt, sondern es treten deutliche Bänder und deren Überschneidungen in den $C^\pm\pi^0$–invarianten Massenquadraten auf. Diese liegen im $\pi^+\pi^-\pi^0$–Dalitzplot (Abb. 3.11.a) gerade beim Massenquadrat ($0,593\,\mathrm{GeV}^2\!/c^4$) des $\rho(770)$ und im $K^+K^-\pi^0$–Dalitzplot beim Massenquadrat ($0,85\,\mathrm{GeV}^2\!/c^4$) des $K^*(893)$.
Die 4.290 selektierten $K^+K^-\pi^0$–Ereignisse sind in Ladungs–symmetrisierter Form in Abbildung 3.12 dargestellt. Dieser Dalitzplot enthält zwei Einträge pro Ereignis, obwohl K^+ und K^- unterscheidbar sind, um die vielen Strukturen deutlicher hervortreten zu lassen. In dieser Auftragung sind $K^\pm\pi^0$–Resonanzen als senkrechte und waagerechte Bänder zu sehen. Resonanzen, die in K^+K^- zerfallen, entsprechen Bänder senkrecht zur Diagonalen. Es sind zwei $K^\pm\pi^0$–Bänder zu erkennen (jeweils waagerecht und senkrecht). Das erste entspricht einer invarianten $K^\pm\pi^0$–Masse von $893\,\mathrm{MeV}\!/c^2$, also eindeutig dem $K^*(893)$. Das zweite Band entspricht einer $K^\pm\pi^0$-Masse von $1430\,\mathrm{MeV}\!/c^2$. Dieses Band weist auf die Anwesenheit des $K_0(1430)$, des $K_2(1430)$ oder beider Resonanzen hin. Die Zuordnung der senkrecht zur Diagonalen verlaufenden Bänder zu bekannten Mesonen, die in K^+K^- zerfallen, ist schwieriger, da ein Zustand aus K^+ und K^- sowohl Isospin 1 als auch Isospin 0 besitzen kann. Da auch der $\bar{p}p$–Anfangszustand eine Mischung aus Isospin 1 und 0 ist, kann prinzipiell nicht unterschieden werden, ob es sich um ein a-Meson oder ein f-Meson, bzw. um ein ρ-Meson oder ϕ-Meson handelt. Die einzige relativ sichere Zuordnung, al-

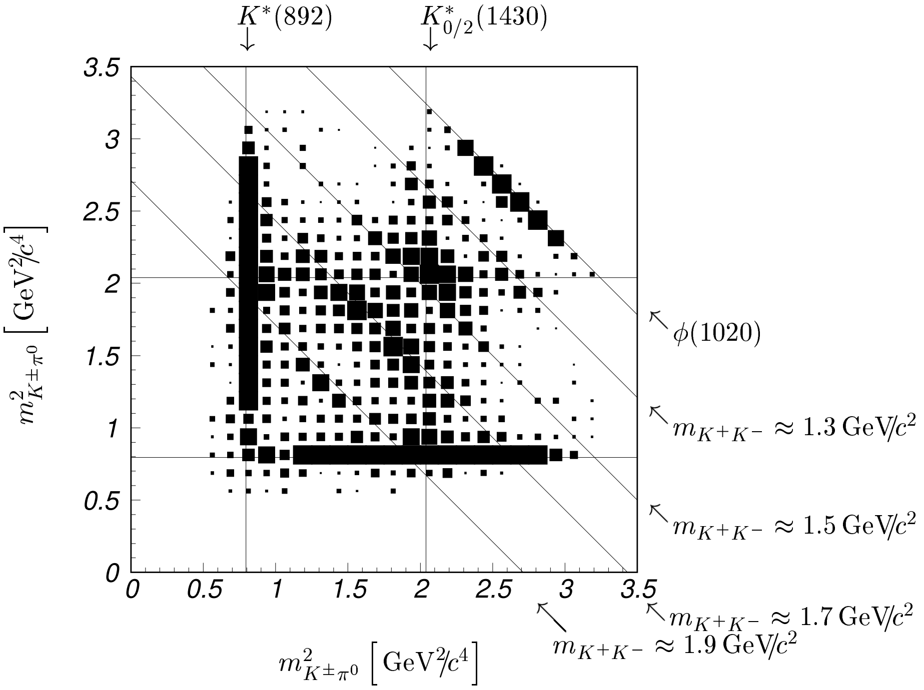

Abbildung 3.12: **Symmetrisierter Dalitzplot** – $\bar{p}\,(1940\,\mathbf{MeV}\!/c)\,p \to K^+K^-\pi^0$.
Der Dalitzplot ist bezüglich der Ladung des Kaons symmetrisiert, daher ist jedes Ereignis zweimal eingetragen.

lein aus der Betrachtung des Dalitzplots, ist ein deutlich hervortretendes, schmales Band, das einer Masse von 1020 MeV/c^2 entspricht. Hierbei handelt es sich um das $\phi(1020)$, das ein sehr großes Verzweigungsverhältnis für den Zerfall in K^+K^- besitzt. Von rechts oben nach links unten im Dalitzplot sind noch vier weitere Strukturen zu sehen, die invarianten K^+K^--Massen von ca. 1,3 GeV/c^2, 1,5 GeV/c^2, 1,7 GeV/c^2 und 1,9 GeV/c^2 entsprechen. Das Band zur niedrigsten Masse läßt sich dem $f_2(1270)$ oder dem $a_2(1320)$ zuordnen. Das Band bei 2,25 GeV^2/c^4 könnte durch ein $a_0(1450)$, ein $f_0(1500)$ oder ein $f_2'(1525)$ hervorgerufen sein. Bei den zwei Bändern höherer Masse ist die experimentelle Situation so unklar, daß insbesondere für die 1.7 GeV/c^2–Region alle erlaubten Quantenzahlen in einer Partialwellenanalyse getestet werden müssen, um Spin und Parität der Resonanzen zu bestimmen.

Kapitel 4

Formalismus

Inhalt dieses Kapitels ist die Beschreibung des Formalismus zur Analyse der drei Reaktionen $\bar{p}\,(600\,\mathrm{MeV}/c)\,p \to \pi^0\pi^0\pi^0$, $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV}/c)\,p \to \eta\eta\pi^0$ und $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV}/c)\,p \to K^+K^-\pi^0$. Der Formalismus ist die Grundlage des in Anhang A und Anhang B ausführlich beschriebenen Analyseprogramms *TARA*. Hier wird das Isobarmodell verwendet, das von aufeinanderfolgenden Zweikörperzerfällen ausgeht. Zur Beschreibung der Zerfälle werden aus Einteilchenzuständen Zweiteilchenzustände konstruiert, deren Eigenschaften im Laufe des Kapitels immer weiter spezifiziert werden. Diese Eigenschaften sind der Gesamtspin J, die Parität P, der Isospin I und schließlich die C– und die G–Parität. Zweikörperzerfälle werden im Ruhesystem des zerfallenden Zustandes formuliert und als Übergänge eines Zustandes mit Quantenzahlen $J^{PC}I^G$ in einen Zweiteilchenzustand mit denselben Quantenzahlen aufgefaßt. Die Abhängigkeit von den Zerfallswinkeln ist eindeutig und von Modellen unabhängig. Im Gegensatz hierzu kann die Dynamik des Zerfalls, also die Abhängigkeit der Zerfallsamplituden von der Energie, nur geeignet parametrisiert werden. Solche geeigneten Parametrisierungen werden in Abschnitt 4.4 motiviert. Dann werden alle Ergebnisse dieses Kapitels in einer Gewichtsfunktion w zur vollständigen Beschreibung einer Vielzahl von Reaktionen zusammengefaßt. Den Abschluß dieses Kapitels bilden die Formulierung einer *Likelihood*–Funktion sowie eine Diskussion der unabhängigen Observablen und der freien Parameter einer Anpassung. Die in diesem Kapitel benutzten Symbole sind im Glossar am Ende dieser Arbeit zusammengefaßt und zum größten Teil in Abbildung 4.1 veranschaulicht. Explizite Ausdrücke zur Berechnung der in diesem Kapitel vorkommenden Größen (Zerfallswinkel, invariante Masse, usw.), Funktionen (D–Funktionen, Kugelflächenfunktionen, usw.) Transformationen (Rotationen zur Berechnung der Winkel, Lorentz–Transformationen, usw.) und verschiedene Parametrisierungen der Zerfallsdynamik finden sich in Anhang C.

4.1 Konstruktion der Zustände

Der Spinformalismus, der dieser Arbeit zugrundeliegt, wurde bereits in den fünfziger Jahren von M. Jacob und G. C. Wick entwickelt [41]. Hier werden zwei unterschiedliche Darstellungen, die Helizitätsdarstellung und die kanonische Darstellung, diskutiert, welche sich in der Wahl des Bezugssystems, in dem die Spinkomponenten angegeben werden, unterscheiden. Zur Bestimmung der Winkelabhängigkeiten benutzt das Analyseprogramm *TARA* konsequent den Helizitätsformalismus, da sich in dieser Darstellung sowohl massebehaftete als auch masselose Teilchen, insbesondere Photonen, einheitlich darstellen lassen. Die Helizität eines Teilchens ist als die Projektion des Teilchenspins auf die Flugrichtung

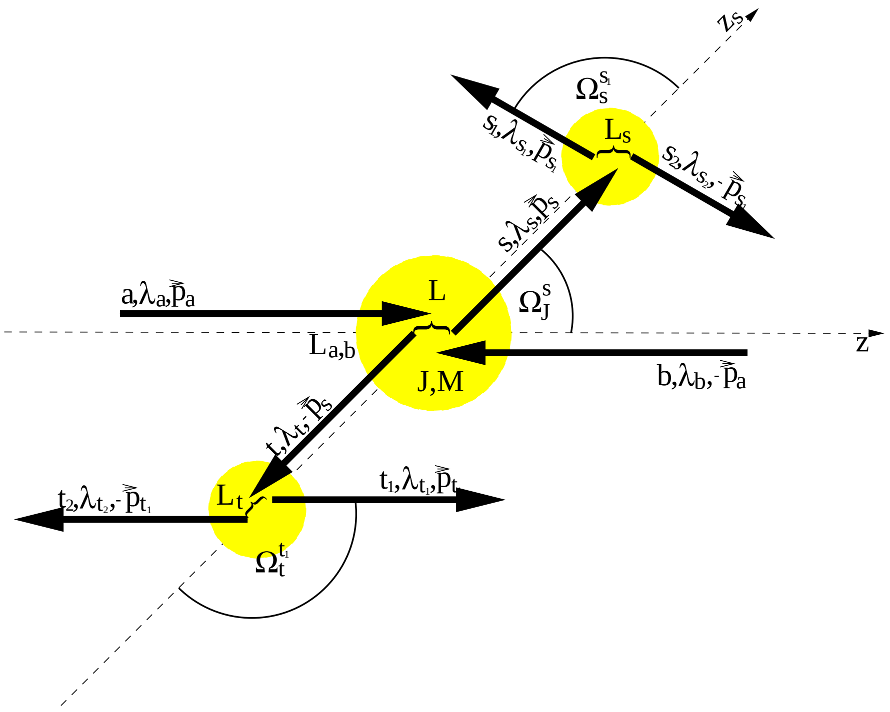

Abbildung 4.1: **Produktion und Zerfall eines Zustandes J.**
Dargestellt ist die Produktions- und Zerfallskette $a + b \to J \to s + t$, $s \to s_1 + s_2$, $t \to t_1 + t_2$. Die Kreise deuten die jeweiligen Ruhesysteme von J, s und t an.
Im Fall der in dieser Arbeit analysierten Reaktion $\bar{p}p \to K^+K^-\pi^0$, ist a das Antiproton, b das Proton und $|JM\rangle$ das erzeugte $\bar{p}p$-System. Das Teilchen s könnte z.B. ein $K^{\star +}$ sein, das in die gemessenen Teilchen $s_1 = K^+$ und $s_2 = \pi^0$ zerfällt. t ist dann ebenfalls ein gemessenes, in diesem Sinne stabiles, K^-.

definiert. Lediglich die Parametrisierung der Zerfallsdynamik (siehe 4.4) erfordert hier die Betrachtung des kanonischen Formalismus, da viele gängige Parametrisierungen den relativen Bahndrehimpuls L benutzen. Die nun folgenden Ausführungen orientieren sich eng an der Veröffentlichung von S. U. Chung [42] und sollen als deren Ergänzung zur praktischen Anwendung in einer Analyse verstanden werden. Eine weitere Beschreibung findet sich in [43].

4.1.1 Einteilchenzustände

Der Unterschied zwischen der Helizitäts– und der kanonischen Darstellung tritt besonders bei der Betrachtung von Einteilchenzuständen hervor.

4.1.1.1 Definitionen

Gegeben sei ein Ruhezustand mit Spin j $|jm\rangle$, beziehungsweise $|j\lambda\rangle$ bezüglich eines Koordinatensystems (x, y, z). Hier haben m und λ noch die gleiche Bedeutung, beide sind

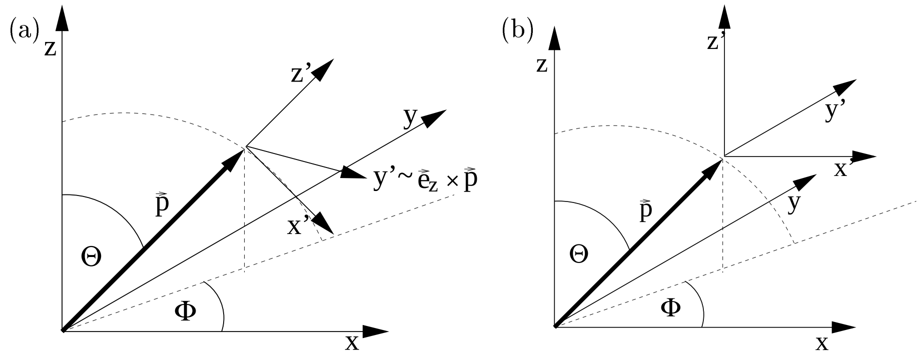

Abbildung 4.2: **Bezugssysteme.**
Relative Orientierung der Bezugssysteme (x', y', z') in der
(a) Helizitäts– und der
(b) kanonischen Darstellung
zum Koordinatensystem des Ruhezustandes (x, y, z). In der Helizitätsdarstellung zeigt die z'–Achse in Richtung des Impulses $\vec{p}$. In der kanonischen Darstellung sind die Achsen parallel zu denen des Ruhezustandes $|jm\rangle$.

die Projektion von j auf die z-Achse. Sei $\hat{R}_0 = \hat{R}_0(\phi, \theta, 0)$ der Drehoperator, welcher die z-Achse in Abb.4.2 in die Richtung des Impulses $\vec{p}$ dreht

$$\vec{e}_{\vec{p}} = \hat{R}_0(\phi, \theta, 0)\vec{e}_z \tag{4.1}$$

Ein Einteilchenzustand mit Impuls $\vec{p}$ in der kanonischen Darstellung wird durch eine reine Lorentztransformation $\tilde{L}[\tilde{p}]$

$$\begin{aligned} |\tilde{p}, jm\rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{L}[\tilde{p}] \;\; |jm\rangle \\ &= \hat{R}_0 \; \tilde{L}_z[p] \; \hat{R}_0^{-1} \;\; |jm\rangle \end{aligned} \tag{4.2}$$

konstruiert. Zuerst wird der Impulsvektor mittels $\hat{R}_0^{-1}$ in die z–Richtung gedreht, dann wird mit dem Betrag des Impulses p nur entlang z Lorentz–transformiert, und schließlich wird die z–Achse mittels $\hat{R}_0$ in die Richtung von $\vec{p}$ gedreht, das heißt die neue z–Achse, z', zeigt wieder in Richtung der ursprünglichen z–Achse (Abb. 4.2.b). Die Lorentztransformation ist in expliziter Form in Gleichung (C.40) in Anhang C.5 angegeben. Helizitäts–Einteilchenzustände (4.3) werden konstruiert, indem zuerst die z–Achse in die Richtung von $\vec{p}$ gedreht wird, und anschließend das Resultat Lorentz–transformiert wird. Die neue z-Achse, z', weist dann in Richtung von $\vec{p}$ (Abb. 4.2.a).

$$\begin{aligned} |\tilde{p}, j\lambda\rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{L}[\tilde{p}]\hat{R}_0 \;\; |j\lambda\rangle \\ &= \hat{R}_0\tilde{L}_z[p] \;\; |j\lambda\rangle \end{aligned} \tag{4.3}$$

Die zweite Zeile der Gleichung ergibt sich aus der Ersetzung für $\tilde{L}[\tilde{p}]$ aus (4.2) und der Unitarität der Drehungen. Daher können Helizitäts–Einteilchenzustände auch dadurch konstruiert werden, daß zuerst entlang z mit p Lorentz–transformiert wird, und dann die z–Achse in die Richtung von $\vec{p}$ gedreht wird. Die Ergebnisse der Transformationen in den Definitionen (4.2, 4.3) sind für beide Fälle in Abb. 4.2 graphisch dargestellt.

4.1.1.2 Verhalten unter Drehungen

Ohne Beweis sei hier das Verhalten der Einteilchenzustände unter beliebigen Drehungen $\hat{R}$ angegeben:

$$\hat{R}\ |\vec{p}, jm\rangle \quad = \quad \sum_{m'} D^j_{m',m}(R)\ \ |\hat{R}\vec{p}, jm'\rangle \tag{4.4}$$

$$\hat{R}\ |\vec{p}, j\lambda\rangle \quad = \quad |\hat{R}\vec{p}, j\lambda\rangle \tag{4.5}$$

Dabei bezeichnet $D^j_{m',m}(R)$ die Wignerschen D–Funktionen bezüglich der Drehung $\hat{R}$. Formeln zu den D–Funktionen befinden sich in Anhang C.3. Gleichung (4.4) zeigt, daß sich die kanonischen Zustände unter Drehungen wie Ruhezustände $|jm\rangle$ verhalten, wohingegen sich für Helizitäts–Zustände (4.5) die Helizität λ bei Drehungen nicht ändert, da die Quantisierungsachse ($\vec{e}_{\vec{p}}$) selbst mitgedreht wird.

4.1.1.3 Verknüpfung der Darstellungen

Da beide Darstellungen vollständig sind, können die Einteilchenzustände in beiden Darstellungen durch

$$|\vec{p}, j\lambda\rangle \quad = \quad \sum_{m} D^j_{m,\lambda}(R_0)\ \ |\vec{p}, jm\rangle \tag{4.6}$$

eineindeutig ineinander umgerechnet werden.

4.1.2 Zweiteilchenzustände

Der in Abb.4.1 skizzierte Zerfall $J \to s + t$ ist, wie sich weiter unten zeigen wird, der Übergang eines Zustandes eines Teilchens $|JM\rangle_{\text{ein Teilchen}-J}$, unter Erhaltung des Drehimpulses J und der dritten Komponente M, in den Zustand zweier Teilchen $|JM\rangle_{\text{zwei Teilchen}-s,t}$. Der Zerfall wird im Ruhesystem von J betrachtet, also wird der Zweiteilchenzustand lediglich im J–Ruhesystem benötigt.

4.1.2.1 Definitionen

Zweiteilchenzustände im Ruhesystem von J lassen sich direkt mit Hilfe der Einteilchenzustände definieren. Das eine Teilchen (s[1]) besitzt dann den Impuls $\vec{p}_s$ und das andere Teilchen (t) den entgegengesetzten Impuls ($-\vec{p}_s$). Der Ruhezustand aus zwei Teilchen, der nur noch vom Raumwinkel Ω^s_J, beziehungsweise der Richtung von $\vec{p}_s$ abhängt, setzt sich also aus zwei voneinander abhängigen „bewegten“ Zuständen zusammen. Im kanonischen Formalismus wird der Zweiteilchenzustand (4.7) wie folgt aus den Einteilchenzuständen (4.2) zusammengesetzt:

$$|\Omega^s_J, sm_s tm_t\rangle \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \kappa\{\tilde{L}\,[\tilde{p}_s = (E_s, \vec{p}_s)]\ \ |sm_s\rangle\ \ \tilde{L}\,[\tilde{p}_t = (E_t, -\vec{p}_s)]\ \ |tm_t\rangle\} \tag{4.7}$$

Analog werden die Helizitäts–Zweiteilchenzustände (4.8) mit Hilfe der Einteilchenzustände (4.3) konstruiert:

$$\begin{aligned} |\Omega^s_J, s\lambda_s t\lambda_t\rangle \quad &\stackrel{\text{def}}{=} \quad \kappa\ \hat{R}_0\{\tilde{L}_z[p_s]\ \ |s\lambda_s\rangle\ \ \tilde{L}_{-z}[p_s]\ \ |t\lambda_t\rangle\} \\ &= \quad \hat{R}_0\,(\Omega^s_J)\ \ |\Omega = (0,0),\ s\lambda_s t\lambda_t\rangle \end{aligned} \tag{4.8}$$

[1] Der Name des Teilchens bezeichnet auch dessen Spin.

Der Normierungsfaktor κ kann aus den Normierungen der Einteilchenzustände berechnet werden. In beiden Darstellungen lautet das Resultat:

$$\kappa = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{p_s}{m_J}} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\rho_s} \quad , \tag{4.9}$$

wobei m_J die invariante Masse des Gesamtzustandes und $\rho_s = p_s/m_J$ den invarianten Phasenraumfaktor bezeichnen. Die Berechnung des Raumwinkels Ω^s_J, beziehungsweise der Winkel θ^s_J, ϕ^s_J aus den Vierervektoren der Teilchen des Endzustandes ist in Anhang C.8 beschrieben.

4.1.2.2 Zweiteilchenzustände mit Gesamtspin J

Zweiteilchenzustände mit Gesamtspin J in der kanonischen Darstellung werden durch Kopplung des relativen Bahndrehimpulses L der beiden Teilchen und des Gesamtspins S konstruiert. Zunächst werden dazu die einzelnen Spins (s und t) zum Spin S ($= S_{s,t} = s \oplus t$) gekoppelt:

$$|\Omega, Sm_S\rangle = \sum_{m_s,m_t} (sm_s tm_t|Sm_S) \; |\Omega, sm_s tm_t\rangle \tag{4.10}$$

Dabei bezeichnet $(sm_s tm_t|Sm_S)$ einen Clebsch–Gordan–Koeffizienten. Formeln zur Berechnung der Clebsch–Gordan–Koeffizienten und deren Symmetrieeigenschaften befinden sich in Anhang C.4. Ein Zustand zu einem bestimmten relativen Bahndrehimpuls L ist durch

$$|Lm_L Sm_S\rangle = \int d\Omega \; Y^L_{m_L}(\Omega) \; |\Omega, Sm_S\rangle \tag{4.11}$$

gegeben. Schließlich werden L und S zum Gesamtdrehimpuls J gekoppelt ($J = L \oplus S$):

$$\begin{aligned} |JMLS\rangle &= \sum_{m_L,m_S} (Lm_L Sm_S|JM) \; |Lm_L Sm_S\rangle \qquad (4.12) \\ &= \sum_{\substack{m_L,m_S \\ m_s,m_t}} (Lm_L Sm_S|JM) \; (sm_s tm_t|Sm_S) \\ &\qquad \int d\Omega \; Y^L_{m_L}(\Omega) \; |\Omega, sm_s tm_t\rangle \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $Y^L_{m_L}(\Omega)$ eine Kugelflächenfunktion. Einige Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen sind in Anhang C.2 aufgelistet. Zweiteilchenzustände mit Gesamtdrehimpuls J in der Helizitätsdarstellung (4.13) werden analog zu (4.11) definiert[2]

$$|JM\lambda_s\lambda_t\rangle = N_J \int d\Omega \; D^{J\,*}_{M,\lambda_s-\lambda_t}(\Omega) \; |\Omega, s\lambda_s t\lambda_t\rangle \quad , \tag{4.13}$$

wobei N_J ein zusätzlicher Normierungsfaktor ist.

[2] Für den Beweis, daß der Zustand $|JM\lambda_s\lambda_t\rangle$ Eigenzustand von $\hat{J}$ ist, werden die Eigenschaften der D–Funktionen benötigt. Es reicht aus zu zeigen, daß sich der Zustand bei einer beliebigen Drehungen gemäß Gl. (4.4) transformiert. Der Beweis findet sich in [42].

4.1.2.3 Normierung und Vollständigkeit

Wird der Normierungsfaktor N_J in (4.13) zu

$$N_J = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \tag{4.14}$$

gewählt, so lassen sich die Vollständigkeitsrelationen für beide Darstellungen wie folgt schreiben:
In der Helizitäts-Darstellung lautet der Einheitsoperator $\hat{E}$:

$$\hat{E} = \sum_{J,M,\lambda_s,\lambda_t} |JM\lambda_s\lambda_t\rangle\langle JM\lambda_s\lambda_t| \tag{4.15}$$

und in der kanonischen Darstellung ist der Einheitsoperator:

$$\hat{E} = \sum_{J,M,L,S} |JMLS\rangle\langle JMLS| \tag{4.16}$$

Die Normierung der Zweiteilchenzustände in der Helizitätsdarstellung ist dann durch

$$\langle \Omega^{s'}_{J'},\ s'\lambda_s{}'t'\lambda_t{}'|\Omega^s_J,\ s\lambda_s t\lambda_t\rangle = \delta^{(2)}(\Omega^{s'}_{J'} - \Omega^s_J)\ \delta_{s,s'}\ \delta_{t,t'}\ \delta_{\lambda_s,\lambda_s{}'}\ \delta_{\lambda_t,\lambda_t{}'} \tag{4.17}$$

$$\langle J'M'\lambda_s{}'\lambda_t{}'|JM\lambda_s\lambda_t\rangle = \delta_{J,J'}\ \delta_{M,M'}\ \delta_{\lambda_s,\lambda_s{}'}\ \delta_{\lambda_t,\lambda_t{}'} \tag{4.18}$$

gegeben, beziehungsweise in der kanonischen Formulierung durch

$$\langle \Omega^{s'}_{J'},\ s'm_s{}'t'm_t'|\Omega^s_J,\ sm_s tm_t\rangle = \delta^{(2)}(\Omega^{s'}_{J'} - \Omega^s_J)\ \delta_{s,s'}\ \delta_{t,t'}\ \delta_{m_s,m_s{}'}\ \delta_{m_t,m_t{}'} \tag{4.19}$$

$$\langle J'M'L'S'|JMLS\rangle = \delta_{J,J'}\ \delta_{M,M'}\ \delta_{L,L'}\ \delta_{S,S'} \tag{4.20}$$

4.1.2.4 Umrechnung Helizitätsformalismus – kanonischer Formalismus

Um zwischen den beiden Darstellungen wechseln zu können, werden Umkopplungskoeffizienten $\langle JMLS|JM\lambda_s\lambda_t\rangle$ (4.21) benötigt. Die Umkopplungskoeffizienten können aus den Definitionen der Zustände (4.12, 4.13) und den Eigenschaften der D–Funktionen hergeleitet werden. Das Resultat lautet:

$$\langle JMLS|JM\lambda_s\lambda_t\rangle = \sqrt{\frac{2L+1}{2J+1}}(L0S, \lambda_s - \lambda_t|J, \lambda_s - \lambda_t)\ (s\lambda_s t - \lambda_t|S, \lambda_s - \lambda_t) \tag{4.21}$$

Insbesondere zur Berechnung der Zweiteilchenzerfallsamplituden in den jeweiligen Darstellungen sind die beiden folgenden Gleichungen sehr nützlich, welche die Zweiteilchenzustände aus den Definitionen (4.7, 4.8) mit den Zweiteilchenzuständen mit Gesamtspin J (4.12, 4.13) verknüpfen. Die Gleichungen (4.22, 4.23) folgen direkt aus den Definitionen der Zweiteilchenzustände mit Gesamtspin J (4.12, 4.13), und den Normierungen (4.19, 4.17).

$$\begin{aligned}
\langle \Omega^s_J, sm_s tm_t|JMLS\rangle &\overset{4.12}{=} \sum_{\substack{m_L,m_S\\ m_s{}',m_t{}'}} (Lm_L Sm_S|JM)\ (s'm_s{}'t'm_t{}'|Sm_S) \\
&\qquad \int d\Omega'\ Y^L_{m_L}(\Omega')\ \langle \Omega^s_J, sm_s tm_t|\Omega' s'm_s{}'t'm_t{}'\rangle \\
&\overset{4.19}{=} \sum_{\substack{m_L,m_S\\ m_s{}',m_t{}'}} (Lm_L Sm_S|JM)\ (s'm_s{}'t'm_t{}'|Sm_S) \\
&\qquad \int d\Omega'\ \delta^{(2)}(\Omega^s_J - \Omega')\ Y^L_{m_L}(\Omega')\ \delta_{s,s'}\ \delta_{t,t'}\ \delta_{m_s,m_s{}'}\ \delta_{m_t,m_t{}'} \\
&= \sum_{m_L,m_S} (Lm_L Sm_S|JM)\ (sm_s tm_t|Sm_S)\ Y^L_{m_L}(\Omega^s_J)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
\langle \Omega_J^s, s\lambda_s t\lambda_t | JM\lambda_s{}'\lambda_t' \rangle &\overset{4.13}{=} N_J \int d\Omega' \, D^{J*}_{M,\lambda_s'-\lambda_t'}(\Omega') \, \langle \Omega_J^s s\lambda_s t\lambda_t | \Omega' s' \lambda_s{}' t' \lambda_t' \rangle \\
&\overset{4.17}{=} N_J \int d\Omega' \, D^{J*}_{M,\lambda_s'-\lambda_t'}(\Omega') \, \delta^{(2)}(\Omega' - \Omega_J^s) \, \delta_{s,s'} \, \delta_{t,t'} \, \delta_{\lambda_s,\lambda_s{}'} \, \delta_{\lambda_t,\lambda_t{}'} \\
&= N_J D^{J*}_{M,\lambda_s-\lambda_t}(\Omega_J^s) \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

4.2 Zweikörperzerfälle

Die im vorherigem Abschnitt definierten Zustände dienen nun zur Berechnung von Zweikörperzerfällen. Dieses Kapitel diskutiert nacheinander die unterschiedlichen Symmetrien und die daraus folgenden Erhaltungsgrößen. Dazu werden der zerfallende Zustand J und dessen Zerfallsprodukte s und t immer weiter in ihren Eigenschaften spezifiziert (Parität, Ladung, Isospin, $\cdots$). Die Energie– und die Impulserhaltung beim Zerfall werden als selbstverständlich vorrausgesetzt.

4.2.1 Erhaltung des Drehimpulses

Sei nun im Ruhesystem von J der zerfallende Zustand $|JM\rangle$ vorgegeben, das heißt der Spin J und dessen z–Komponente M seien beliebig, aber fest. Das Ruhesystem von J wird durch den zentralen, größeren Kreis in Abbildung 4.1 angedeutet. Der Zweiteilchenzerfall A_{zwei} läßt sich nun, sowohl unter der Verwendung von Helizitäts– als auch mit kanonischen Zweiteilchenzuständen berechnen. Da die Helizitäten (λ_s, λ_t) bezüglich der z_s-Achse beziehungsweise die Spinkomponenten (m_s, m_t) bezüglich der z-Achse der Zerfallsprodukte s und t nicht gemessen werden, muß darüber summiert werden. Das Ergebnis A_{zwei} muß in beiden Darstellungen das gleiche sein, das bedeutet:

$$\begin{aligned}
A_{\text{zwei}} &= A_{\text{heli}} = \sum_{\lambda_s,\lambda_t} \langle \overrightarrow{p_s}, s\lambda_s | \langle -\overrightarrow{p_s}, t\lambda_t | \, \hat{M} \, |JM\rangle \qquad (4.24) \\
&= A_{\text{kano}} = \sum_{m_s,m_t} \langle \overrightarrow{p_s}, sm_s | \langle -\overrightarrow{p_s}, tm_t | \, \hat{M} \, |JM\rangle
\end{aligned}$$

Hier bezeichnet $\hat{M}$ den (unbekannten) Zerfallsoperator. Die Schreibweise mit zwei bra–Vektoren verdeutlicht, daß es sich um einen Zerfall in zwei Teilchen handelt und erlaubt den direkten Vergleich mit Abb. 4.1.

4.2.1.1 Zerfallsamplituden

Nun werden die korrekt normierten, in Abschnitt 4.1.2 hergeleiteten, Zweiteilchenzustände in (4.24) eingesetzt und partielle Zerfallsamplituden definiert. Ein für die Praxis besonders angenehmer Vorteil der Helizitätsdarstellung ist, daß der Ausdruck für A_{zwei} folgende einfache Form annimmt:

$$\begin{aligned}
A_{\text{heli}} &\overset{4.8}{=} \sum_{\lambda_s,\lambda_t} \frac{4\pi}{\sqrt{\rho_s}} \langle \Omega_J^s, s\lambda_s t\lambda_t | \hat{M} | JM\rangle \\
&\overset{4.15}{=} \sum_{\substack{\lambda_s,\lambda_t \\ \lambda_s',\lambda_t'}} \langle \Omega_J^s s, \lambda_s t\lambda_t | JM\lambda_s'\lambda_t' \rangle \frac{4\pi}{\sqrt{\rho_s}} \langle JM\lambda_s'\lambda_t' | \hat{M} | JM\rangle \\
&\overset{4.23}{=} \sum_{\lambda_s,\lambda_t} \sqrt{\frac{4\pi(2J+1)}{\rho_s}} \langle JM\lambda_s\lambda_t | \hat{M} | JM\rangle \; D^{J*}_{M,\lambda_s-\lambda_t}(\Omega_J^s)
\end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_s,\lambda_t} \alpha^J_{\lambda_s,\lambda_t}\, D^{J*}_{M,\lambda_s-\lambda_t}(\Omega^s_J) \tag{4.25}$$

Hier wurde zunächst die Definition der Helizitäts–Zweiteilchenzustände (4.8) eingesetzt, dann die Vollständigkeitsrelation der Zweiteilchenzustände mit Gesamtspin J (4.15) verwendet, anschließend Gleichung (4.23) eingesetzt und zuletzt die partiellen Helizitäts–Zerfallsamplituden $\alpha^J_{\lambda_s,\lambda_t}$ zu

$$\alpha^J_{\lambda_s,\lambda_t} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{4\pi(2J+1)}{\rho_s}}\langle JM\lambda_s\lambda_t|\hat{M}|JM\rangle \tag{4.26}$$

definiert. Bei ähnlicher Vorgehensweise ergibt sich für kanonische Zweiteilchenzustände, unter Verwendung von (4.7), (4.16) und (4.22)

$$\begin{aligned}
A_{\text{kano}} &\stackrel{4.7}{=} \sum_{m_s,m_t} \frac{4\pi}{\sqrt{\rho_s}}\,\langle\Omega^s_J, sm_stm_t|\hat{M}|JM\rangle \\
&\stackrel{4.16}{=} \sum_{\substack{L,S\\m_s,m_t}} \langle\Omega^s_J, sm_stm_t|JMLS\rangle\,\frac{4\pi}{\sqrt{\rho_s}}\,\langle JMLS|\hat{M}|JM\rangle \\
&\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{L,S\\m_s,m_t}} \sqrt{4\pi}\,A^J_{L,S}\,\langle\Omega^s_J sm_stm_t|JMLS\rangle \\
&\stackrel{4.22}{=} \sum_{\substack{L,S\\m_L,m_S\\m_s,m_t}} \sqrt{4\pi}A^J_{L,S}\,(Lm_LSm_S|JM)\,(sm_stm_t|Sm_S)\,Y^L_{m_L}(\Omega^s_J)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Hier wurden die kanonischen partiellen Zerfallsamplituden $A^J_{L,S}$ zu

$$A^J_{L,S} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{4\pi}{\rho_s}}\langle JMLS|\hat{M}|JM\rangle \tag{4.28}$$

definiert.

4.2.1.2 Umrechnung Helizitätsformalismus – kanonischer Formalismus

Der Zusammenhang zwischen den partiellen Zerfallsamplituden $\alpha^J_{\lambda_s,\lambda_t}$ und $A^J_{L,S}$ ergibt sich aus den Umkopplungskoeffizienten (4.21) und der Vollständigkeitsrelation (4.15, 4.16) in der jeweils anderen Darstellung. Von der kanonischen Darstellung gelangt man zur Helizitätsdarstellung durch

$$\begin{aligned}
\alpha^J_{\lambda_s,\lambda_t} &\stackrel{4.16}{=} \sum_{L,S}\langle JM\lambda_s\lambda_t|JMLS\rangle\sqrt{\frac{4\pi(2J+1)}{\rho_s}}\,\langle JMLS|\hat{M}|JM\rangle \\
&\stackrel{4.21}{=} \sum_{L,S}\sqrt{2L+1}\,(L0S,\lambda_s-\lambda_t|J,\lambda_s-\lambda_t)\,(s\lambda_st,-\lambda_t|S,\lambda_s-\lambda_t)\,A^J_{L,S}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

beziehungsweise von der Helizitätsdarstellung zur kanonischen Darstellung durch

$$\begin{aligned}
A^J_{L,S} &= \sum_{\lambda_s,\lambda_t}\langle JMLS|JM\lambda_s\lambda_t\rangle\sqrt{\frac{4\pi}{\rho_s}}\,\langle JM\lambda_s\lambda_t|\hat{M}|JM\rangle \\
&= \sum_{\lambda_s,\lambda_t}\langle JMLS|JM\lambda_s\lambda_t\rangle\,\frac{1}{\sqrt{2J+1}}\,\alpha^J_{\lambda_s,\lambda_t} \\
&= \sum_{\lambda_s,\lambda_t}\frac{\sqrt{2L+1}}{2J+1}(L0S,\lambda_s-\lambda_t|J,\lambda_s-\lambda_t)\,(s\lambda_st-\lambda_t|S,\lambda_s-\lambda_t)\,\alpha^J_{\lambda_s,\lambda_t}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Damit läßt sich überprüfen, ob die beiden Ausdrücke für den Zerfall in (4.24) in beiden Darstellungen tatsächlich gleich sind. Nach Einsetzen der expliziten Ausdrücke (4.25, 4.27) in (4.24) gilt unter Berücksichtigung von (4.29)

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda_s,\lambda_t} \alpha^J_{\lambda_s,\lambda_t} D^{J*}_{M,\lambda_s-\lambda_t}(\Omega^s_J) &= \sum_{\lambda_s,\lambda_t} \alpha^J_{\lambda_s,\lambda_t} \sum_{L,S} \frac{\sqrt{4\pi(2L+1)}}{2J+1} \\ &\quad (L0S,\lambda_s-\lambda_t|J,\lambda_s-\lambda_t)\;(s\lambda_s t,-\lambda_t|S,\lambda_s-\lambda_t) \\ &\quad \sum_{\substack{m_L,m_S\\ m_s,m_t}} (Lm_LSm_S|JM)\;(sm_stm_t|Sm_S)\;Y^L_{m_L}(\Omega^s_J)\end{aligned} \tag{4.31}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert eine Entwicklung der konjugiert komplexen D-Funktionen auf der linken Seite von (4.31) nach Kugelflächenfunktionen:

$$\begin{aligned}D^{J*}_{M,\lambda_s-\lambda_t}(\Omega^s_J) &= \sum_{L,S} \frac{\sqrt{4\pi(2L+1)}}{2J+1}\;(L0S,\lambda_s-\lambda_t|J\lambda_s-\lambda_t)\;(s\lambda_s t,-\lambda_t|S\lambda_s-\lambda_t) \\ &\quad \sum_{\substack{m_L,m_S\\ m_s,m_t}} (Lm_LSm_S|JM)\;(sm_stm_t|Sm_S)\;Y^L_{m_L}(\Omega^s_J)\end{aligned}$$

Für den Fall $s = t = 0$ ist auch $m_s = m_t = \lambda_s = \lambda_t = S = 0$, dann gilt $m_L = M$ und $L = J$. Damit ergibt sich die in [44] angegebene Gleichung

$$D^{J*}_{M,0}(\Omega^s_J) = \sqrt{\frac{4\pi}{2J+1}}Y^J_M(\Omega^s_J) \tag{4.32}$$

4.2.1.3 Beispiel $(1 \to 1+0)$

Ein Beispiel soll demonstrieren, wie einfach sich Zerfälle im Helizitätsformalismus formulieren lassen. Dazu sei der Zerfall eines Spin $J = 1$ Zustandes in ein Spin $s = 1$ Teilchen und ein Spin $t = 0$ Teilchen betrachtet, wobei nur die Erhaltung des Drehimpulses berücksichtigt werden soll. Für beliebiges $M = -J \cdots J$ (also $|M| \leq J$) werden lediglich alle möglichen $(\lambda_s–\lambda_t)$–Kombinationen aufaddiert, für die $|\lambda_s| \leq 1$, $|\lambda_t| \leq 0 \Rightarrow \lambda_t = 0$ und $|\lambda_s - \lambda_t| \leq J = 1$ ist. Also wird der Zerfall durch

$$A^{1\to1+0} = \alpha^1_{0,0}D^{J*}_{M,0}(\Omega^s_J) + \alpha^1_{1,0}D^{J*}_{M,1}(\Omega^s_J) + \alpha^1_{-1,0}D^{J*}_{M,-1}(\Omega^s_J) \tag{4.33}$$

beschrieben[3].

4.2.2 Erhaltung der Parität

Die Erhaltung der Parität ist eine Folge der Invarianz eines physikalischen Systems unter Raumspiegelungen. In Zerfällen, die durch die starke oder die elektromagnetische Wechselwirkung hervorgerufen werden, bleibt die Parität erhalten. In diesem Abschnitt wird diskutiert, welche Auswirkung die Forderung nach Paritätserhaltung auf die Beschreibung der Zerfälle hat.

[3] Dies entspricht der Ausgabe des in Anhang A und Anhang B beschriebenen Analyseprograms *TARA*, wenn die Zerfallsprodukte stabile (stabil im Sinne von gemessen) Teilchen sind, die nicht weiter zerfallen. Der einzige Unterschied besteht lediglich darin, daß dort die Amplitude als Vektor (genauer die D-Funktionen) mit $2J + 1$ Zeilen geschrieben wird, entsprechend den möglichen M.

4.2.2.1 Einteilchenzustände

Der Paritätsoperators $\hat{P}$, also eine Raumspiegelung, wird durch

$$\hat{P} \quad : \quad \vec{x} \to -\vec{x} \quad ; \quad \vec{p} \to -\vec{p} \quad ; \quad J \to J \tag{4.34}$$

charakterisiert. Wird der Paritätsoperator auf einen ruhenden Zustand angwandt, dann handelt es sich um eine spezielle Art von Raumspiegelung, welche die innere Symmetrie (intrinsische Parität) des Zustandes offenbart.
Bosonen werden durch skalare Felder (Spin 0), Vektorfelder (Spin 1) und Tensorfelder (Spin ganzzahlig, ≥ 2) beschrieben. Wird der Paritätsoperator auf die Felder Ψ zweimal hintereinander angewandt, dann ergibt sich wieder das entsprechende Feld.

$$\begin{aligned} \hat{P}^2 \ |\Psi\rangle &= |\Psi\rangle \\ \Rightarrow \hat{P} \ |\Psi\rangle &= \pm |\Psi\rangle = P \ |\Psi\rangle \end{aligned} \tag{4.35}$$

Demzufolge ist die intrinsische Parität von Bosonen $P = \pm 1$. Entsprechend den Feldern werden jene Teilchen mit Spin-Parität 0^+ als Skalare, mit 0^- als Pseudoskalare, mit 1^- als Vektoren und diejenigen mit 1^+ als Pseudovektoren usw. bezeichnet.
Spin–1/2–Fermionen werden beschrieben durch Spinoren, die bei einer Drehung um 360° ihr Vorzeichen wechseln, es gilt

$$\begin{aligned} \hat{P}^2 \ |\Psi\rangle &= \pm |\Psi\rangle \\ \Rightarrow \quad P &= \pm 1 \ \text{ oder } \ \pm \imath \end{aligned} \tag{4.36}$$

Die Parität des Teilchens, beziehungsweise Antiteilchens, muß daher per definitionem festgelegt werden. Die gängige Konvention ist, daß dem Proton die intrinsische Parität $P_p = +1$ zugewiesen wird, die des Antiprotons ist dann $P_{\bar{p}} = -1$.
Für masselose Teilchen ist die intrinsische Parität eigentlich nicht sinnvoll, da kein Ruhesystem existiert. Trotzdem wird für das Photon die Parität zu $P_\gamma = -1$ definiert[4]. Auf diese Weise können auch radiative Zerfälle korrekt beschrieben werden, zum Beispiel der Zerfall $\omega \to \gamma\pi^0$, der dann als Paritäts–erhaltender Zerfall $1^- \to 1^- 0^-$ aufgefasst werden kann[5].
In Zusammenhang mit einer reinen Lorentztransformation (siehe Abschnitt C.5) gilt

$$\hat{P} \ \tilde{L}[\vec{p}] \quad = \quad \tilde{L}[-\vec{p}] \ \hat{P} \tag{4.37}$$

Die Wirkung des Paritätsoperators auf die kanonischen Einteilchenzustände läßt sich sofort angeben

$$\begin{aligned} \hat{P} \ |\vec{p}; jm\rangle &= P \ | -\vec{p}; jm\rangle \\ &= P \ |\phi + \pi, \pi - \theta, p; jm\rangle \quad , \end{aligned} \tag{4.38}$$

vorausgesetzt der Ruhezustand hat die intrinsische Parität P. Bei den Helizitäts–Einteilchenzuständen wechselt die Helizität λ das Vorzeichen:

$$\hat{P} \ |\vec{p}; j\lambda\rangle \quad = \quad \hat{P} \ \sum_m \left[D^j_{m,\lambda}(\phi,\theta) \ \ |\theta = 0, \phi = 0, p; jm\rangle \right]$$

[4] Diese Wahl folgt aus der Forderung nach Invarianz des Hamiltonoperators unter Raumspiegelungen $\hat{P}$.

[5] Für das masselose Photon ist die Helizität $\lambda_\gamma = 0$ verboten. Wird der Zerfall $\omega \to \gamma\pi^0$ wie oben aufgefasst, dann verbietet die Paritätserhaltung $\lambda_\gamma = 0$.

$$\begin{aligned}
&= \sum_m D^j_{m,\lambda}(\phi{+}\pi, \pi{-}\theta)\ P\ \ |0,0,p;jm\rangle \\
&= \sum_m P\ e^{-i\pi j}\ D^j_{m,-\lambda}(\phi,\theta)\ \ |0,0,p;jm\rangle \\
&= P\ e^{-i\pi j}\ |-\vec{p};j,-\lambda\rangle \qquad (4.39)\\
&= P\ e^{-i\pi j}\ |\phi{+}\pi, \pi{-}\theta, p; j, -\lambda\rangle
\end{aligned}$$

4.2.2.2 Zweiteilchenzustände mit Gesamtspin J

Auch bei den Zweiteilchenzuständen mit Gesamtspin J ist es einfacher, zunächst die Wirkung des Paritätsoperators auf die kanonischen Zustände zu studieren. Seien P_s und P_t die intrinsischen Paritäten von Teilchen s und t, dann gilt:

$$\hat{P}\ |JMLS\rangle \ \ = \ \ P_s\ P_t\ (-1)^L\ |JMLS\rangle \qquad (4.40)$$

Der zusätzliche Faktor $(-1)^L$ tritt wegen des bekannten Verhaltens der Kugelflächenfunktionen unter Raumspiegelungen auf (C.12). Mit Hilfe der Gleichung (4.40), den Umkopplungskoeffizienten (4.21) und den Eigenschaften der Clebsch–Gordan–Koeffizienten läßt sich die Wirkung von $\hat{P}$ auf die Helizitäts–Zweiteilchenzustände berechnen:

$$\begin{aligned}
\hat{P}\ |JM\lambda_s\lambda_t\rangle \ &\overset{4.21}{=} \sum_{L,S} \sqrt{\tfrac{2L+1}{2J+1}}\ (L0S, \lambda_s{-}\lambda_t|J, \lambda_s{-}\lambda_t)\ (s\lambda_s t, -\lambda_t|S, \lambda_s{-}\lambda_t)\ \hat{P}\ |JMLS\rangle \\
&\overset{4.40,C.38}{=} \sum_{L,S} \sqrt{\tfrac{2L+1}{2J+1}}\ P_s\ P_t\ (-1)^L\ (L0S, -\lambda_s{+}\lambda_t|J, -\lambda_s{+}\lambda_t)\ (-1)^{J+L+S} \\
&\qquad (s, -\lambda_s t\lambda_t|S, -\lambda_s{+}\lambda_t)\ (-1)^{S+s_1+s_2}\ \ |JMLS\rangle \\
&= \sum_{L,S} \sqrt{\tfrac{2L+1}{2J+1}}\ P_s\ P_t\ (-1)^{J+s+t}\ (L0S, -\lambda_s{+}\lambda_t|J, -\lambda_s{+}\lambda_t) \\
&\qquad (s, -\lambda_s t\lambda_t|S, -\lambda_s{+}\lambda_t)\ \ |JMLS\rangle \\
&= P_s\ P_t\ (-1)^{J+s+t}\ \ |JM, -\lambda_s, -\lambda_t\rangle \qquad (4.41)
\end{aligned}$$

4.2.2.3 Zweikörperzerfall

Mit diesen Gleichungen kann die Paritätserhaltung in einem Zweikörperzerfall studiert werden. Ist der Zerfallsoperator $\hat{M}$ Paritäts–erhaltend, und sind sowohl die Zerfallsprodukte s und t, als auch der Anfangszustand J Eigenzustände zu $\hat{P}$, so gilt für die partiellen Zerfallsamplituden $A^J_{L,S}$ in der kanonischen Formulierung

$$\begin{aligned}
\langle JMLS|\hat{P}\hat{M}\hat{P}|JM\rangle \ \ &= \ \ P\ P_s\ P_t\ (-1)^L\ \langle JMLS|\hat{M}|JM\rangle \\
\Rightarrow A^J_{L,S} \ \ &= \ \ P\ P_s\ P_t\ (-1)^L\ A^J_{L,S} \qquad (4.42)
\end{aligned}$$

Dies ist ein wohlbekanntes Ergebnis: Eine partielle Zerfallsamplitude $A^J_{L,S}$ verschwindet, beziehungsweise der Zerfall mit diesem L ist verboten, wenn nicht

$$P \ \ = \ \ P_s\ P_t\ (-1)^L \qquad (4.43)$$

erfüllt ist. Je nach den intrinsischen Paritäten ist also nur gerader oder ungerader relativer Bahndrehimpuls L erlaubt. Da für jede Zerfallsamplitude $|L-S| \leq J \leq |L+S|$ gelten muß, ist ein Zerfall genau dann Paritäts–verboten, wenn nur genau ein L möglich ist, und

dieses L Gleichung (4.43) nicht erfüllt.
Für die partiellen Zerfallsamplituden $\alpha^J_{\lambda_s,\lambda_t}$ im Helizitäts–Formalismus ergibt sich:

$$\begin{aligned}\langle JM\lambda_s\lambda_t|\hat{P}\hat{M}\hat{P}|JM\rangle &= P\ P_s\ P_t\ (-1)^{J+s+t}\ \langle JM,-\lambda_s,-\lambda_t|\mathcal{M}|JM\rangle \\ \Rightarrow\quad \alpha^J_{\lambda_s,\lambda_t} &= P\ P_s\ P_t\ (-1)^{J+s+t}\ \alpha^J_{-\lambda_s,-\lambda_t} \end{aligned} \tag{4.44}$$

Anstelle der verbotenen Bahndrehimpulse L im kanonischen Formalismus, ergibt sich im Helizitäts–Formalismus, daß eine partielle Zerfallsamplitude derjenigen mit umgekehrten Vorzeichen der Helizitäten proportional ist. Aus der zweiten Zeile von (4.44) folgt, daß der gesamte Zerfall Paritäts–verboten ist, wenn $\alpha^J_{0,0}$ die einzig mögliche partielle Zerfallsamplitude ist, und in (4.44) $PP_sP_t(-1)^{J+s+t} = -1$ ist. In diesem Fall gilt $\alpha^J_{0,0} = -\alpha^J_{0,0}$, also ist die einzige partielle Zerfallsamplitude identisch null.

4.2.2.4 Beispiel ($1^- \rightarrow 1^- + 0^-$)

Hier soll das Beispiel aus Kapitel 4.2.1.3 wieder aufgegriffen werden. In dem Zerfall soll nun, zusätzlich zum Drehimpuls, auch die Parität erhalten sein. Sind die intrinsischen Paritäten der Teilchen zum Beispiel $P = P_J = +$, $P_s = -$ und $P_t = -$, dann gilt nach (4.44): $\alpha^1_{1,0} = \alpha^1_{-1,0}$. Mithin lautet die Amplitude zu beliebigem, aber festem M:

$$A \;=\; \alpha^1_{0,0} D^{J^*}_{M,0}(\Omega^s_J) + \alpha^1_{1,0}\left\{D^{J^*}_{M,1}(\Omega^s_J) + D^{J^*}_{M,-1}(\Omega^s_J)\right\} \tag{4.45}$$

Dies entspricht zum Beispiel dem Zerfall $b_1 \rightarrow \omega\pi$.
Ein Beispiel für einen Paritäts–verbotenen Zerfall ist $2^- \rightarrow 0^-0^-$. Dies entspricht z.B. dem Zerfall $\eta_2(1700) \rightarrow \pi\pi$. In der kanonischen Darstellung gibt es wegen der Erhaltung des Drehimpulses nur eine partielle Zerfallsamplitude $A^J_{LS} = A^2_{20}$, da wegen $S = 0$, $L = 2$ gelten muß. Aber aus (4.43) folgt, daß nur ungerades L erlaubt ist; mithin ist der Zerfall verboten. Im Helizitäts–Formalismus gibt es ebenfalls nur eine mögliche partielle Zerfallsamplitude $\alpha^J_{\lambda_s,\lambda_t} = \alpha^2_{00}$, da Teilchen mit Spin Null nur die Helizität Null haben können. Aus (4.44) folgt aber, daß diese partielle Zerfallsamplitude verschwindet; mithin folgt auch in der Helizitäts–Darstellung, daß der Zerfall verboten ist.

4.2.3 Erhaltung additiver Quantenzahlen - Ladungserhaltung

Daß alle Wechselwirkungen die elektrischen Ladung Q erhalten, ist wohlbekannt und vielfach bestätigt. Dieser Tatsache ist es zum Beispiel zu verdanken, daß das Elektron stabil ist[6]. Bezeichnen Q_J, Q_s und Q_t die elektrischen Ladungen der Teilchen in Einheiten der Elementarladung e in dem Zerfall $J \rightarrow s + t$, dann muß gelten

$$Q_J \;=\; Q_s + Q_t \quad , \tag{4.46}$$

ansonsten ist der Zerfall verboten.
Aber auch die Erhaltung anderer additiver Quantenzahlen wird hier unter dem Oberbegriff Ladungserhaltung zusammengefaßt. Diese sind in Tab.1.2 für die Grundbausteine der Materie, die Quarks und Leptonen aufgelistet. Dazu gehören die Erhaltung der Baryonenzahl[7]

[6] Der zur Zeit in [44] angegebene untere Grenzwert für die mittlere Lebensdauer des Elektrons, der aus dem (nicht beobachtetem) Zerfall $e^- \rightarrow \nu_e + \gamma$ bestimmt wurde, beträgt 10^{23} Jahre.

[7] Baryonen, z.B. die Nukleonen (Proton, Neutron, $\cdots$), haben die Baryonenzahl Eins, Antibaryonen die Baryonenzahl minus Eins. Alle Mesonen (aber auch Gluebälle und Hybride) und Leptonen haben die Baryonenzahl Null.

(B) und die Erhaltung der Leptonenzahlen[8](L_e, L_μ, L_τ)[9]. Auch die „schweren Quark–Flavors" (Strangeness q_S, Charm q_C, Bottomness q_B und Topness q_T) sind ladungsartige Quantenzahlen, die in starken Zerfällen erhalten bleiben, da bei der starken Wechselwirkung der Flavor der Quarks nicht geändert wird. Die Erhaltung der Strangeness verbietet zum Beispiel die Reaktion $\bar{p}p \to K\pi$. Daher gilt bei starken Zerfällen für jede der Quantenzahlen bezüglich der Quark–Flavors eine zu (4.46) analoge Gleichung. Bei schwachen Zerfällen gilt dies nicht, da durch den Austausch von W–Bosonen der Flavor eines Quarks geändert werden kann. Anstelle der Upness und der Downness wird wegen der Massenentartung des u– und des d–Quarks (und auch aus historischen Gründen) die dritte Komponente des Isospins I_3 und die Baryonenzahl B benutzt, worauf in den folgenden Abschnitten noch ausführlich eingegangen wird.

4.2.4 Erhaltung des Isospins – Ladungsunabhängigkeit

Das Konzept des Isospins wurde von Heisenberg eingeführt, um der Ladungsunabhängigkeit der starken Wechselwirkung Rechnung zu tragen. Mit Hilfe des Isospins können zum Beispiel das Proton und das Neutron als bestimmte Isospinzustände eines Teilchens mit Isospin–1/2 – dem Nukleon – aufgefaßt werden. Das Proton ist der Isospin–„up"–Zustand mit $I_3 = 1/2$ und das Neutron der Isospin–„down"–Zustand mit $I_3 = -1/2$.

4.2.4.1 Einteilchenzustände

Einteilcheneigenzustände $|II_3\rangle$ zum Isopsinoperator $\hat{I}$ im Isospinraum werden analog zu Einteilchen-Ruhezuständen zum „gewöhnlichen" Spin $|jm\rangle$ in Abschnitt 4.1.1.1 definiert, das heißt es gelten insbesondere die folgenden Beziehungen:

$$\hat{I}^2 \;|II_3\rangle \;=\; I(I+1)\;|II_3\rangle \tag{4.47}$$

$$\hat{I}_3 \;|II_3\rangle \;=\; I_3\;|II_3\rangle \tag{4.48}$$

$$\hat{I}_\pm \;|II_3\rangle \;=\; \sqrt{(I \mp I_3)(I \pm I_3 + 1)}\;|I, I_3 \pm 1\rangle \tag{4.49}$$

Wobei $I_\pm$, wie beim gewöhnlichen Spin, für den Auf- und den Absteigeoperator steht. Für die Definition der G–Parität wird das Verhalten der Isospin-Eigenzustände bei einer Drehung um π bezüglich der I_2–Achse im Isospinraum benötigt:

$$\hat{R}_{I_2}(\pi)\;|II_3\rangle \;=\; (-1)^{I-I_3}\;|I, -I_3\rangle \tag{4.50}$$

Die dritte Komponente des Isospins I_3 ist eng mit der elektrischen Ladung Q eines Teilchens verbunden. Für Baryonen mit Baryonenzahl B und Mesonen mit Baryonenzahl $B = 0$ ist die Ladung durch

$$Q \;=\; I_3 + \frac{B}{2} \tag{4.51}$$

gegeben, wenn die Teilchen keine Strangeness besitzen. Die Erhaltung der dritten Komponente des Isospins entspricht daher für Mesonen ohne Strangeness (zum Beispiel: π, η,

[8]Die Leptonenzahlen sind entsprechend der drei Familien von Leptonen ($l = e, \mu, \tau$) definiert: $L_{l^-} = L_{\nu_l} = 1$ und $L_{l^+} = L_{\bar{\nu}_l} = -1$. Für alle anderen Teilchen sind alle Leptonenzahlen identisch Null.

[9]Tests auf die Erhaltung dieser Quantenzahlen sind zwar bereits im Analyseprogram *TARA* implementiert, spielen aber hier keine Rolle, da sowohl Baryonen, als auch Leptonen, Fermionen sind, deren Zerfälle noch nicht von *TARA* verarbeitet werden können.

ϕ, $\cdots$) der Erhaltung der elektrischen Ladung. Gleichung (4.51) kann auf Baryonen und Mesonen mit Strangeness q_S (Hyperonen und K–Mesonen) verallgemeinert werden:

$$Q = I_3 + \frac{B + q_S}{2} = I_3 + \frac{Y}{2} = I_3 + q_y \tag{4.52}$$

Die in dieser Gleichung definierte Größe $Y = B + q_S = 2q_y$ wird Hyperladung genannt.

4.2.4.2 Zweiteilchenzustände

Analog zum Zweiteilchenzustand mit Spin S in der kanonischen Darstellung (4.10) wird aus den Einteilchenzuständen mit Isospin (I_s, I_t) und dritten Komponenten (I_{3s}, I_{3t}) der Zweiteilchen–Isospinzustand $|II_3\rangle$ konstruiert. Dies geschieht wiederum mit Hilfe von Clebsch–Gordan–Koeffizienten.

$$|I_J I_{3_J}\rangle = \sum_{I_{3_s}, I_{3_t}} (I_s I_{3_s} I_t I_{3_t} | I_J I_{3_J}) \; |I_s I_{3_s} I_t I_{3_t}\rangle \tag{4.53}$$

Insgesamt lautet der kanonische Zweiteilchenzustand mit Gesamtdrehimpuls J und Gesamtisospin I_J daher:

$$\begin{aligned} |JMLSI_J I_{3_J}\rangle = \sum_{\substack{m_L, m_S \\ m_s, m_t \\ I_{3_s}, I_{3_t}}} & (Lm_L S m_S | JM) \; (s m_s t m_t | S m_S) \\ & (I_s I_{3_s} I_t I_{3_t} | I_J I_{3_J}) \int d\Omega \; Y^L_{m_L}(\Omega) \; |\Omega, s m_s I_s I_{3_s} t m_t I_t I_{3_t}\rangle \end{aligned} \tag{4.54}$$

Genauso werden die Zweiteilchenzustände mit Gesamtdrehimpuls J in der Helizitätsdarstellung $|JM\lambda_s\lambda_t\rangle$ um den Isospin auf $|JM\lambda_s\lambda_t I_J I_{3_J}\rangle$ erweitert.

4.2.4.3 Zweiteilchenzerfälle

Bleibt der Isospin in dem Zerfall $J \to s + t$ erhalten, und sind die Isospins (I_J, I_s, I_t) und deren dritte Komponenten (I_{3_J}, I_{3_s}, I_{3_t}) für die Teilchen in dem Zerfall fest vorgeben, zum Beispiel durch Messung der elektrischen Ladung, dann müssen lediglich alle partiellen Zerfallsamplituden mit einem Isospin–Clebsch–Gordan–Koeffizienten $c^{s,t}_{I_J, I_{3_J}}$ gewichtet werden

$$c^{s,t}_{I_J, I_{3_J}} = (I_s I_{3_s} I_t I_{3_t} | I_J I_{3_J}) \quad , \tag{4.55}$$

wobei die dritte Komponente erhalten bleibt ($I_{3_J} = I_{3_s} + I_{3_t}$). Die partiellen Zerfallsamplituden brauchen nicht nach der Ladung spezifiziert werden[10], das bedeutet zum Beispiel für den Zerfall $a_2 \to \pi\eta$:

$$\begin{aligned} \alpha^{a_2^Q, \pi^q \eta}_{\lambda_\pi \lambda_\eta} &= (1Q00|1Q) \; \alpha^{a_2, \pi\eta}_{\lambda_\pi \lambda_\eta} \\ &= \alpha^{a_2, \pi\eta}_{\lambda_\pi \lambda_\eta} \; \text{für} \; Q = 1, 0, -1 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Lediglich bei der Parametrisierung der Dynamik der partiellen Zerfallsamplituden (siehe Kapitel 4.4) müssen gegebenenfalls die Sollmassen der Teilchen nach dem Betrag der Ladung unterschieden werden, da zum Beispiel die Masse der geladenen Pionen von der Masse der neutralen Pionen verschieden ist [44]:

$$m_{\pi^\pm} - m_{\pi^0} = (4.5936 \pm 0.0005) \, \mathrm{MeV}/c^2$$

[10] Daher unterscheidet das Analyseprogramm *TARA* bei der Definition eines Teilchens auch nicht unterschiedliche Teilchen in einem Isospin–Multiplett, zum Beispiel für das Pion $\pi = (\pi^+, \pi^0, \pi^-)$.

4.2.5 Erhaltung der C– und G–Parität

Die Erhaltung der C–Parität ist eine Folge der Invarianz eines physikalischen Systems unter dem Austausch von Teilchen gegen Antiteilchen. Die hier verwendeten Definitionen zur C– und G–Parität folgen denen aus [45]. Die Definitionen stellen sicher, daß sich Teilchen– und Antiteilchenzustände unter Drehungen im Isospinraum gleich verhalten. Dies hat den großen praktischen Vorteil, daß gewöhnliche Isospin–Glebsch–Gordan–Koeffizienten sowohl für Teilchen als auch für Antiteilchen verwendet werden können. Ansonsten müßten zusätzliche Vorzeichen wie in [46] eingeführt werden. Die Ladungskonjugation $\hat{C}$ negiert alle additiven (ladungsartigen) Quantenzahlen q ($\bar{q} = -q$) und läßt dabei die Raum–Zeit–Koordinaten und den Spin eines Zustandes unberührt.

$$\begin{aligned} \hat{C} \quad &: \quad \vec{x} \to \vec{x} \quad ; \quad \vec{p} \to \vec{p} \quad ; \quad J \to J \\ & \qquad\qquad\quad q \to -q \\ \text{mit} \quad q \quad &= \quad Q, B, I_3, q_S, q_C, q_B, q_T, q_{L_e}, q_{L_\mu}, q_{L_\tau} \end{aligned} \tag{4.57}$$

4.2.5.1 Einteilchenzustände

Zur Vereinfachung soll sich hier auf die für diese Arbeit relevanten, drei leichtesten Flavors q_U, q_D und q_S beschränkt werden. In diesem Fall reichen drei ladungsartige Quantenzahlen aus, um Zustände vollständig zu beschreiben. Aus historischen Gründen sollen hier die Baryonenzahl B, die Hyperladung q_Y aus (4.52) und die dritte Komponente des Isospins I_3 verwendet werden. Im Gegensatz zur üblichen Methode, in der die Antiteilchenzustände über den $\hat{C}$–Operator definiert sind, werden hier die Antiteilchenzustände durch den $\hat{G}$–Operator definiert, der seinerseits aus einer Drehung um π bezüglich der I_2–Achse im Isospinraum (4.50) und aus der Ladungskonjugation $\hat{C}$ besteht

$$\hat{G} \quad = \quad \hat{R}_{I_2}(\pi)\, \hat{C} = \hat{C}\, \hat{R}_{I_2}(\pi) \tag{4.58}$$

Der zum Einteilchenzustand $|B q_Y I I_3\rangle$ zugehörige Antiteilchenzustand $|\bar{B} \bar{q}_Y I, -I_3\rangle$ ist durch

$$\hat{G}\ |B q_Y I \quad I_3\rangle \quad = \quad g\ |\bar{B} \bar{q}_Y I \quad I_3\rangle = g\ |-B, -q_Y I I_3\rangle \tag{4.59}$$

$$\hat{G}\ |\bar{B} \bar{q}_Y I, -I_3\rangle \quad = \quad \bar{g}\ |B q_Y I, -I_3\rangle \tag{4.60}$$

definiert, wobei gefordert wird, daß die im allgemeinen komplexen Zahlen g und $\bar{g}$ unabhängig von I_3 sind, und daß $\hat{G}$ mit einer beliebigen Drehung im Isospinraum kommutiert. Entscheidend dafür ist, daß der $\hat{G}$–Operator in dieser Definition die dritte Komponente des Isospins nicht ändert. Die Wirkung des $\hat{C}$–Operators auf die Einteilchenzustände ist dann:

$$\hat{C}\, |B q_Y I \quad I_3\rangle \quad = \quad g\, (-1)^{I+I_3}\ |\bar{B} \bar{q}_Y I, -I_3\rangle \tag{4.61}$$

$$\hat{C}\, |\bar{B} \bar{q}_Y I, -I_3\rangle \quad = \quad \bar{g}\, (-1)^{I-I_3}\ |B q_Y I \quad I_3\rangle \tag{4.62}$$

Wird der $\hat{C}$–Operator zweimal hintereinander auf einen Zustand angewandt, dann muß sich bis auf eine Phase wieder der gleiche Zustand ergeben. Wenn die Phase zu Null gewählt wird, gilt:

$$\hat{C}^2\ |B q_Y I I_3\rangle \quad = \quad |B q_Y I I_3\rangle \tag{4.63}$$

$$\Rightarrow g\bar{g}\, (-1)^{2I} \quad = \quad 1 \tag{4.64}$$

Für Hadronen[11] werden g und $\bar{g}$ zu

$$g \stackrel{\text{def}}{=} C^0 \ (-1)^{q_Y+I} \tag{4.65}$$
$$\bar{g} \stackrel{\text{def}}{=} C^0 \ (-1)^{\bar{q}_Y+I} \tag{4.66}$$

definiert. Wird zusätzlich noch der „intrinsische“ Flavor[12] F zu

$$\frac{F}{2} \stackrel{\text{def}}{=} B + q_Y = \frac{1}{2}(3B + q_S) \tag{4.67}$$

definiert, mit $\bar{F} = -F$, dann kann C^0 reell gewählt werden, sodaß ${C^0}^2 = 1$ und damit $C^0 = \pm - 1$ gilt. Mit diesen Definitionen sind die Eigenwerte für $\hat{C}^2$ und $\hat{G}^2$ durch

$$\hat{C}^2 \ |Bq_Y II_3\rangle = |Bq_Y II_3\rangle \tag{4.68}$$
$$\hat{G}^2 \ |Bq_Y II_3\rangle = (-1)^{2I} \ |Bq_Y II_3\rangle \tag{4.69}$$

gegeben. Werden die Antiteilchenzustände (wie sonst üblich) über den $\hat{C}$–Operator anstatt über den $\hat{G}$–Operator definiert, dann ergeben sich dieselben Eigenwerte für $\hat{C}^2$ und $\hat{G}^2$. Mit den obigen Definitionen kann die Wirkung der Operatoren $\hat{G}$ und $\hat{C}$ auf Hadronen angegeben werden:

$$\begin{aligned}
\hat{G} \ |Bq_Y I \quad I_3\rangle &= C^0 \, (-1)^{q_Y+I} \ |\bar{B}\bar{q}_Y I \quad I_3\rangle \qquad (4.70)\\
\hat{G} \ |\bar{B}\bar{q}_Y I, -I_3\rangle &= C^0 \, (-1)^{\bar{q}_Y+I} \ |Bq_Y I, -I_3\rangle \\
\hat{C} \ |Bq_Y I \quad I_3\rangle &= C^0 \, (-1)^{q_Y-I_3} \ |\bar{B}\bar{q}_Y I, -I_3\rangle \qquad (4.71)\\
\hat{C} \ |\bar{B}\bar{q}_Y I, -I_3\rangle &= C^0 \, (-1)^{\bar{q}_Y+I_3} \ |Bq_Y I \quad I_3\rangle
\end{aligned}$$

Der Vorteil all dieser Definitionen (und der Nomenklatur C^0) wird klar, wenn diese Gleichungen zum Beispiel auf die Mesonen eines Nonetts angewandt werden, denn die Quantenzahl C^0 hat für alle Mesonen in einem J^{PC}–Nonett den gleichen Wert. Es ist der Eigenwert C der C–Paritäts–Eigenzustände in einem Nonett, also des neutralen Partners im Isospin–Triplett (z.B.: π^0) und der beiden Isosinguletts ohne Strangeness (z.B.: η und η'). Nur bezüglich aller Ladungsquantenzahlen neutrale Zustände[13] können nach (4.71) Eigenzustände zum $\hat{C}$–Operator sein, also nur Teilchen, die ihr eigenes Antiteilchen sind. Für diese Teilchen gilt $B = \bar{B} = q_Y = \bar{q}_Y = I_3 = 0$. Nach (4.71) ist dann $C^0 = C$. Für das Kaon–Quartett eines Nonetts gilt dieser Wert dann entsprechend. Es ist nicht möglich, den Wert C^0 für das Kaon–Quartett direkt zu bestimmen. Desweiteren folgt aus (4.70), daß alle Teilchen eines Meson–Nonetts, bis auf das Kaon–Quartett, Eigenzustände zum $\hat{G}$–Operator mit dem Eigenwert $C(-1)^I$ sind, da für diese Teilchen die Hyperladung und der intrinsische Flavor Null sind. Mit Hilfe der Gleichungen (4.70) und (4.71) kann die Wirkung des $\hat{C}$– und des $\hat{G}$–Operators auf alle Teilchen eines Nonetts angeben werden, auch wenn sie keine Eigenzustände zu $\hat{G}$ oder $\hat{C}$ sind[14].

[11] Für Quarks muß der Exponent noch um B, beziehungsweise um $\bar{B}$ erweitert werden. Der Exponent in (4.65) und (4.66) ist dann auch für ganzzahlig.

[12] Der intrinsische Flavor ist immer ganzzahlig (zum Beispiel: $F_\pi = 0$, $F_K = 1$, $F_p = 3$, $F_\Lambda = 2$, $\cdots$), insbesondere auch für Quarks: $F_u = F_d = 1$ und $F_s = 0$. Daher kann für Quarks C^0 ebenfalls reel gewählt werden (siehe Fußnote 11).

[13] Dem Photon wird die C–Parität $C_\gamma = -1$ zugewiesen, da das elektromagnetische Feld A_μ das Vorzeichen bei Anwendung von $\hat{C}$ wechselt.

[14] In analoger Weise kann die Wirkung der Operatoren $\hat{C}$ und $\hat{G}$ auf die Mitglieder des SU(3)–Oktetts aus p, n, Λ, Ξ und Σ angegeben werden. Allerdings muß in diesem Fall $C^0 = 1$ willkürlich gesetzt werden, da keines der neutralen Teilchen Eigenzustand zu $\hat{C}$ ist. Für diese Wahl gilt dann: $\hat{C}|p\rangle = |\bar{p}\rangle$.

4.2.5.2 Zweiteilchenzustände

Für die folgenden Betrachtungen ist es zweckmäßiger anstelle des Raumwinkels Ω_J^s die Aufbruchimpulse $\vec{p}_s$ und $-\vec{p}_s$ in den Zweiteilchenzuständen explizit auszuschreiben, um die Umformungen zu verdeutlichen. Die kanonischen Zweiteilchenzustände aus der Definition (4.7) in Abschnitt 4.1.2.1 müssen zunächst um den Isospin, die Baryonenzahl und die Hyperladung erweitert werden. Die Wirkung der Operatoren der Ladungskonjugation und der G–Parität ist dann nach (4.70) und (4.71) durch

$$\begin{aligned} \hat{C} \quad & |B_s q_{Y_s} I_s \quad I_{3_s} \vec{p}_s s m_s \; ; \; B_t q_{Y_t} I_t \quad I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t\rangle \quad = \\ C_s^0 \; (-1)^{q_{Y_s} - I_{3_s}} \; C_t^0 \; (-1)^{q_{Y_t} - I_{3_t}} \quad & |\bar{B}_s \bar{q}_{Y_s} I_s, -I_{3_s} \vec{p}_s s m_s \; ; \; \bar{B}_t \bar{q}_{Y_t} I_t, -I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t\rangle \end{aligned} \tag{4.72}$$

und

$$\begin{aligned} \hat{G} \quad & |B_s q_{Y_s} I_s I_{3_s} \vec{p}_s s m_s \; ; \; B_t q_{Y_t} I_t I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t\rangle \quad = \\ C_s^0 \; (-1)^{q_{Y_s} + I_s} \; C_t^0 \; (-1)^{q_{Y_t} + I_t} \quad & |\bar{B}_s \bar{q}_{Y_s} I_s I_{3_s} \vec{p}_s s m_s \; ; \; \bar{B}_t \bar{q}_{Y_t} I_t I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t\rangle \end{aligned} \tag{4.73}$$

gegeben.

4.2.5.3 Zweiteilchenzustände mit Gesamtspin J und Gesamtisospin I_J

In diesem Abschnitt werden fünf verschiedene Fälle diskutiert, die sich in den Eigenschaften der Teilchen s und t, aus denen der Zweiteilchenzustand aufgebaut ist, unterscheiden. Die Diskussion umfaßt alle Zweiteilchenzustände, welche für die in dieser Arbeit vorgestellten Analysen relevant sind. Die Betrachtung kanonischer Zustände ist hier ausreichend, da sich keine neuen Bedingungsgleichungen (wie im Falle der Paritätserhaltung) für die partiellen Zerfallsamplituden ergeben. Auch Zweiteilchenzustände mit Gesamtspin J und Gesamtisospin I_J können nur dann Eigenzustände zur C–Parität sein, wenn sie bezüglicher aller ladungsartigen Quantenzahlen neutral sind. Also müssen die Baryonenzahl B_J, die Hyperladung q_{Y_J} und die dritte Komponente des Isospins I_{3_J} für den Gesamtzustand Null sein.

Beide Teilchen sind Eigenzustände von $\hat{C}$ und von $\hat{G}$

Sind die Teilchen s und t Eigenzustände zu $\hat{C}$ ($\hat{G}$) mit Eigenwerten C_s (G_s) und C_t (G_t), dann sind die Zweiteilchenzustände mit Gesamtspin J ebenfalls Eigenzustände zu $\hat{C}$ ($\hat{G}$) mit Eigenwert $C_s C_t$ ($G_s G_t$). Dies bedeutet im Falle der Ladungskonjugation[15] (der Zweiteilchenzustand hat dann $B_J = q_Y = I_{3_J} = 0$):

$$\hat{C} \; |JMLSI_J 0\rangle_{\text{s-t-C}} \quad = \quad C_s \; C_t \; |JMLSI_J 0\rangle_{\text{s-t-C}} \tag{4.74}$$

Im Falle der G–Parität braucht die dritte Komponente des Isospins I_{3_J} des Gesamtzustandes nicht Null zu sein, damit der Zustand Eigenzustand zum $\hat{G}$–Operator ist[16].

$$\hat{G} \; |JMLSI_J I_{3_J}\rangle_{\text{s-t-G}} \quad = \quad G_s \; G_t \; |JMLS, I_J I_{3_J}\rangle_{\text{s-t-G}} \tag{4.75}$$

Teilchen–Antiteilchen–Zustände

[15] Der Index $(s - t - C)$ am Gesamtzustand weist darauf hin, daß beide Teilchen Eigenzustände des $\hat{C}$–Operators sind.

[16] Der Index $(s - t - G)$ am Gesamtzustand weist darauf hin, daß beide Teilchen Eigenzustände des $\hat{G}$–Operators sind.

Wenn t das Antiteilchen von s ist, so gilt $B_t = \bar{B}_s$, $q_{Y_t} = \bar{q}_{Y_s}$. Nach Gleichung (4.72) ist die Wirkung des $\hat{C}$–Operators auf die Zweiteilchenzustände dann durch

$$\begin{array}{lll} \hat{C} & |B_s q_{Y_s} I_s \quad I_{3_s} \quad \vec{p}_s s m_s \; ; \; \bar{B}_s \bar{q}_{Y_s} I_t \quad I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t\rangle & = \\ (-1)^{I_{3_s}+I_{3_t}} & |\bar{B}_s \bar{q}_{Y_s} I_s, -I_{3_s} \quad \vec{p}_s s m_s \; ; \; B_s q_{Y_s} I_t, -I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t\rangle & = \\ (-1)^{I_{3_s}+I_{3_t}+2s} & |B_s q_{Y_s} I_t, -I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t \; ; \; \bar{B}_s \bar{q}_{Y_s} I_s, -I_{3_s} \quad \vec{p}_s s m_s\rangle & \end{array} \tag{4.76}$$

gegeben, und die Wirkung des $\hat{G}$–Operators ist nach Gleichung (4.73)

$$\begin{array}{lll} \hat{G} & |B_s q_{Y_s} I_s I_{3_s} \quad \vec{p}_s s m_s \; ; \; \bar{B}_s \bar{q}_{Y_s} I_t I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t\rangle & = \\ (-1)^{2I_s} & |\bar{B}_s \bar{q}_{Y_s} I_s I_{3_s} \quad \vec{p}_s s m_s \; ; \; B_s q_{Y_s} I_t I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t\rangle & = \\ (-1)^{2I_s+2s} & |B_s q_{Y_s} I_t I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t \; ; \; \bar{B}_s \bar{q}_{Y_s} I_s I_{3_s} \quad \vec{p}_s s m_s\rangle & \end{array} \tag{4.77}$$

In den beiden letzten Gleichungen wurden bewußt nicht alle Indizes s in t umgesetzt, um die jeweils letzte Umformung der Gleichungen (4.76) und (4.77) zu verdeutlichen, in der es auf die Reihenfolge der beiden Zustände ankommt[17]. Die letzten Zeilen entstehen durch Vertauschen der Spinzustände für s und t. Aus diesem Grund tritt der Faktor $(-1)^{2s}$ auf, denn das Vertauschen zweier Fermionen ergibt im Gegensatz zum Vertauschen zweier Bosonen ein Minuszeichen. Mit Hilfe der Gleichungen (4.76) und (4.73) kann nun das Verhalten des Zweiteilchenzustandes mit Gesamtspin J und Gesamtisospin I_J unter $\hat{C}$ und $\hat{G}$ untersucht werden[18]:

$$\begin{aligned} \hat{C}\,|JMLSI_J I_{3_J}\rangle_{s\bar{s}} \;\overset{4.76}{=}\; & \sum_{\substack{m_L,m_S\\ m_s,m_t\\ I_{3_s},I_{3_t}}} (Lm_L Sm_S|JM)\;(sm_s tm_t|Sm_S) \\ & \int d\Omega\; Y^L_{m_L}(\Omega)\;(I_s I_{3_s} I_t I_{3_t}|I_J I_{3_J})\;(-1)^{I_{3_s}+I_{3_t}+2s} \\ & |B_s q_{Y_s} I_t, -I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t \; ; \; \bar{B}_s \bar{q}_{Y_s} I_s, -I_{3_s} \vec{p}_s s m_s\rangle \\ \overset{\text{C.35,C.34}}{=}\; & \sum_{\substack{m_L,m_S\\ m_s,m_t\\ I_{3_s},I_{3_t}}} (Lm_L Sm_S|JM)\;(tm_t sm_s|Sm_S)\;(-1)^{S+2s} \\ & \int d\Omega\; Y^L_{m_L}(\Omega)\;(I_s I_{3_s} I_t I_{3_t}|I_J I_{3_J})\;(-1)^{I_{3_J}+2s} \\ & |B_s q_{Y_s} I_t, -I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t \; ; \; \bar{B}_s \bar{q}_{Y_s} I_s, -I_{3_s} \vec{p}_s s m_s\rangle \\ \overset{\text{C.35,C.38}}{=}\; & \sum_{\substack{m_L,m_S\\ m_s,m_t\\ I_{3_s},I_{3_t}}} (Lm_L Sm_S|JM)\;(tm_t sm_s|Sm_S) \\ & \int d\Omega\; Y^L_{m_L}(\Omega)\;(I_t, -I_{3_t} I_s, -I_{3_s}|I_J, -I_{3_J})\;(-1)^{S+I_{3_J}} \\ & |B_s q_{Y_s} I_t, -I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t \; ; \; \bar{B}_s \bar{q}_{Y_s} I_s, -I_{3_s} \vec{p}_s s m_s\rangle \\ \overset{\text{C.12}}{=}\; & \sum_{\substack{m_L,m_S\\ m_s,m_t\\ I_{3_s},I_{3_t}}} (Lm_L Sm_S|JM)\;(tm_t sm_s|Sm_S) \\ & \int d\Omega\; Y^L_{m_L}(\Omega)\;(I_t, -I_{3_t} I_s, -I_{3_s}|I_J, -I_{3_J})\;(-1)^{L+S+I_{3_J}} \\ & |B_t q_{Y_t} I_t, -I_{3_t} \vec{p}_s t m_t \; ; \; \bar{B}_s \bar{q}_{Y_s} I_s, -I_{3_s}, -\vec{p}_s s m_s\rangle \\ =\; & (-1)^{L+S+I_{3_J}}\;|JMLSI_J, -I_{3_J}\rangle_{s\bar{s}} \end{aligned} \tag{4.78}$$

[17] Es sei darauf hingewiesen, daß sich der Gesamtzustand $|JMLSI_J I_{3_J}\rangle$ in (4.54) nicht ändert, wenn in den Summen jedes s mit einem t vertauscht wird.

[18] Der Gesamtzustand hat den Index „$s\bar{s}$“, um daran zu erinnern, daß t das Antiteilchen von s ist ($t = \bar{s}$).

Hier wurde zunächst das Resultat aus (4.76) eingesetzt und anschließend die Symmetrieeigenschaft (C.35) und die aus (C.34) folgende Beziehung $I_{3_J} = I_{3_s} + I_{3_t}$ ausgenutzt. Danach wurden die Symmetrieeigenschaften (C.35, C.38) verwendet, um den Isospin–Clebsch–Gordan–Koeffizienten umzuformen. Zuletzt wurde die Symmetrieeigenschaft (C.12) der Kugelflächenfunktionen benötigt, um das Vorzeichen vor den Impulsen $\vec{p}_s$ im Zweiteilchenzustand zu vertauschen. Aus der letzten Zeile von (4.78) folgt, daß der Zweiteilchenzustand aus Teilchen und Antiteilchen mit Gesamtspin J und Gesamtisospin I_J Eigenzustand von $\hat{C}$ mit Eigenwert $(-1)^{L+S}$ ist, falls die dritte Komponente des Isospins $I_{3J} = 0$ ist.

$$\hat{C}\,|JMLSI_J0\rangle_{s\bar{s}} \;=\; (-1)^{L+S}\,|JMLSI_J0\rangle_{s\bar{s}} \tag{4.79}$$

Das Verhalten des Zweiteilchenzustandes unter $\hat{G}$ läßt sich analog zu (4.78) herleiten:

$$\begin{aligned}
\hat{G}\,|JMLSI_JI_{3_J}\rangle_{s\bar{s}} &\overset{4.77}{=} \sum_{\substack{m_L,m_S\\ m_s,m_t\\ I_{3_s},I_{3_t}}} (Lm_LSm_S|JM)\,(sm_stm_t|Sm_S) \\
&\quad \int d\Omega\; Y^L_{m_L}(\Omega)\,(I_sI_{3_s}I_tI_{3_t}|I_JI_{3_J})\,(-1)^{2I_s+2s} \\
&\quad |B_sq_{Y_s}I_tI_{3_t},-\vec{p}_stm_t\,;\;\bar{B}_s\bar{q}_{Y_s}I_sI_{3_s}\vec{p}_ssm_s\rangle \\
&\overset{C.35,C.12}{=} \sum_{\substack{m_L,m_S\\ m_s,m_t\\ I_{3_s},I_{3_t}}} (Lm_LSm_S|JM)\,(tm_tsm_s|Sm_S)\,(-1)^{S+2s} \\
&\quad \int d\Omega\; Y^L_{m_L}(\Omega)\,(I_tI_{3_t}I_sI_{3_s}|I_JI_{3_J})\,(-1)^{2I_s+2s+2I_s+I} \\
&\quad (-1)^L\Big|B_tq_{Y_t}I_tI_{3_t}\vec{p}_stm_t\,;\;\bar{B}_s\bar{q}_{Y_s}I_sI_{3_s},-\vec{p}_ssm_s\Big\rangle \\
&= (-1)^{L+S+I}\,|JMLSI_JI_{3_J}\rangle_{s\bar{s}}
\end{aligned} \tag{4.80}$$

Demnach ist der Zweiteilchenzustand aus Teilchen und Antiteilchen mit Gesamtspin J und Gesamtisospin I_J Eigenzustand von $\hat{G}$ mit Eigenwert $(-1)^{L+S+I}$:

$$\hat{G}\,|JMLSI_JI_{3_J}\rangle_{s\bar{s}} \;=\; (-1)^{L+S+I}\,|JMLSI_JI_{3_J}\rangle_{s\bar{s}} \tag{4.81}$$

Es sei hier ausdrücklich betont, daß die Ergebnisse (4.81) und (4.79) unabhängig davon sind, ob das Teilchen s ein Fermion oder ein Boson ist. Der Vollständigkeit halber sei hier notiert, daß der Teilchen–Antiteilchen–Zustand auch Paritäts–Eigenzustand mit Eigenwert $(-1)^{L+2s}$ ist, unabhängig von der intrinsischen Parität der Teilchen.

$$\hat{P}\,|JMLS,I_JI_{3_J}\rangle_{s\bar{s}} \;=\; (-1)^{L+2s}\,|JMLS,I_JI_{3_J}\rangle_{s\bar{s}} \tag{4.82}$$

Leichte Mesonen ohne Strangeness

Für leichte Mesonen ohne Strangeness gilt $B_s = B_t = q_{Y_s} = q_{Y_t} = 0$, was auch auf Gluebälle und leichte Hybride ohne Strangeness zutrifft. Sind die Teilchen s und t leichte Mesonen ohne Strangeness, dann braucht nur die Ladungskonjugation betrachtet werden, da beide Teilchen Eigenzustände zu $\hat{G}$ sind. Also gilt für die G–Parität Gleichung (4.75). Der Gesamtzustand besitzt ebenfalls keine Hyperladung und hat die Baryonenzahl Null ($B_J = q_{Y_J} = 0$). Die Wirkung von $\hat{C}$ auf den Gesamtzustand[19] wird wie folgt berechnet:

$$\hat{C}\,|JMLSI_JI_{3_J}\rangle_{\mathrm{loF}} \overset{4.71}{=} \sum_{\substack{m_L,m_S\\ m_s,m_t\\ I_{3_s},I_{3_t}}} (Lm_LSm_S|JM)\,(sm_stm_t|Sm_S)$$

[19] Der Index „loF“ am Gesamtzustand erinnert daran, daß der Zustand aus leichten Mesonen ohne äußeren Flavor (Strangeness, Charme, usw.) aufgebaut ist.

$$
\begin{aligned}
& \int d\Omega\ Y^L_{m_L}(\Omega)\ (I_s I_{3_s} I_t I_{3_t} | I_J I_{3_J}) \\
& C^0_s (-1)^{-I_{3_s}}\ C^0_t (-1)^{-I_{3_t}}\ |I_s, -I_{3_s} \vec{p}_s s m_s\ ;\ I_t, -I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t\rangle \\
\stackrel{\text{C.38,C.34}}{=} & \sum_{\substack{m_L, m_S \\ m_s, m_t \\ I_{3_s}, I_{3_t}}} (L m_L S m_S | JM)\ (s m_s t m_t | S m_S) \\
& \int d\Omega\ Y^L_{m_L}(\Omega)\ (-1)^{I_J + I_s + I_t}\ (I_s\ {-I_{3_s}} I_t\ {-I_{3_t}} | I_J\ {-I_{3_J}}) \\
& C^0_s C^0_t (-1)^{-I_{3_J}}\ |I_s\ {-I_{3_s}} \vec{p}_s s m_s\ ,\ I_t\ {-I_{3_t}}\ {-\vec{p}_s} t m_t\rangle \\
= & C^0_s (-1)^{I_s}\ C^0_t (-1)^{I_t}\ (-1)^{I_J - I_{3_J}}\ |JMLSI_J, -I_{3_J}\rangle_{\text{loF}} \\
\stackrel{4.70}{=} & G_s G_t\ (-1)^{I_J - I_{3_J}} |JMLSI_J, -I_{3_J}\rangle_{\text{loF}}
\end{aligned} \tag{4.83}
$$

Die letzte Zeile von 4.83 zeigt, daß der Zweiteilchenzustand aus zwei leichten Mesonen ohne Strangeness Eigenzustand zur Ladungskonjugation $\hat{C}$ mit Eigenwert $G_s G_t (-1)^I$ ist, falls die dritte Komponente des Isospins I_{3_J} Null ist.

$$
\hat{C}\ |JMLSI_J 0\rangle_{\text{loF}} \quad = \quad G_s\ G_t\ (-1)^{I_J}\ |JMLSI_J 0\rangle_{\text{loF}} \tag{4.84}
$$

Eines der Teilchen besitzt Strangeness

Dies ist der Fall $B_s = B_t = q_{Y_t} = 0$, aber $q_{Y_s} \neq 0$. In diesem Fall kann der Gesamtzustand weder Eigenzustand zu $\hat{C}$ noch zu $\hat{G}$ sein.

Beide Teilchen besitzen Strangeness

Der Gesamtzustand kann nur Eigenzustand zu $\hat{C}$ und/oder zu $\hat{G}$ sein, wenn er insgesamt keine äußere Strangeness besitzt. Daher muß für die Zweiteilchenzustände gelten $q_{Y_t} = \bar{q}_{Y_s}$. Der Zweiteilchenzustand $|q_{Y_s} I_s I_{3_s} \vec{p}_s s m_s\ ;\ \bar{q}_{Y_s} I_t I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t\rangle$ ist im allgemeinen kein Eigenzustand zu $\hat{C}$ und/oder $\hat{G}$. Um einen Eigenzustand zu erzeugen, muß der Zustand noch bezüglich der Hyperladungen q_{Y_s} und q_{Y_t} „symmetrisiert" werden. Im Falle von leichten Mesonen sind dies Zweiteilchenzustände aus Kaonen (K, K^*). In der nun folgenden Definition von Zweiteilchenzuständen mit Gesamtspin J, Gesamtisospin I_J und Hyperladung $q_Y = 0$ zeigt sich der Vorteil der Definitionen zu Beginn diese Abschnittes besonders deutlich. Es können weiterhin gewöhnliche $SU(2)$–Clebsch–Gordan–Koeffizienten für den Isospin verwendet werden. Alle zusätzlichen zur Symmetriesierung benötigten Vorzeichen ergeben sich aus den in (4.65, 4.66) „C–Paritäten" C^0, die für jedes Nonett einen definierten Wert besitzen, nämlich den Eigenwert der C–Paritäts–Eigenzustände des Nonetts.

$$
\begin{aligned}
|JMLSI_J I_{3_J} q_Y = 0\rangle_{\text{str}\pm} \stackrel{\text{def}}{=} & \sum_{\substack{m_L, m_S \\ m_s, m_t \\ I_{3_s}, I_{3_t}}} (L m_L S m_S | JM)\ (s m_s t m_t | S m_S) \\
& \int d\Omega\ Y^L_{m_L}(\Omega)\ (I_s I_{3_s} I_t I_{3_t} | I_J I_{3_J}) \\
& \frac{1}{\sqrt{2}} \Big\{\ |q_{Y_s} I_s I_{3_s} \vec{p}_s s m_s\ ;\ \bar{q}_{Y_s} I_t I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t\rangle \\
& \qquad \pm\ C^0_s\ C^0_t\ (-1)^{I_J + I_s + I_t} \\
& \qquad |\bar{q}_{Y_s} I_s I_{3_s} \vec{p}_s s m_s\ ;\ q_{Y_s} I_t I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t\rangle\ \Big\}
\end{aligned} \tag{4.85}
$$

Der Faktor $1/\sqrt{2}$ dient der Normierung des Gesamtzustandes[20]. Wie sich zeigen wird, bestimmt das Vorzeichen ($\pm$) zwischen den Zweiteilchenzuständen in obiger Definition die

[20] Der Index „str" am Gesamtzustand erinnert daran, daß beide Teilchen (s, t) äußere Strangeness haben.

C–Parität des Gesamtzustandes ($C = \pm$). Insgesamt hat der zweite Zweiteilchenzustand in der Definition folgendes relative Vorzeichen zum ersten Zweiteilchenzustand:

$$\mathrm{sgn}(C, G, q_{Y_s}, q_{Y_t}) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{sgn}(C, I_J,\ C_s^0, I_s,\ C_t^0, I_t) = C C_s^0\ C_t^0\ (-1)^{I_J+I_s+I_t} \tag{4.86}$$

Die Wirkung der Operatoren $\hat{C}$ und $\hat{G}$ auf den Gesamtzustand (4.85) kann nun studiert werden.

$$\begin{aligned}
\hat{C}\ |JMLSI_JI_{3_J}\rangle_{\mathrm{str}\pm} \overset{4.72,C.38}{=} & \sum_{\substack{m_L,m_S\\ m_s,m_t\\ I_{3_s},I_{3_t}}} (Lm_LSm_S|JM)\ (sm_stm_t|Sm_S) \\
& \int d\Omega\ Y_{m_L}^L(\Omega)\ (I_s, -I_{3_s}I_t, -I_{3_t}|I_J, -I_{3_J})\ (-1)^{I_J+I_s+I_t} \\
& \frac{1}{\sqrt{2}} \Big\{\ C_s^0\ C_t^0\ (-1)^{q_{Y_s}+\bar{q}_{Y_s}-I_{3_s}-I_{3_t}} \\
& \quad |\bar{q}_{Y_s}I_s, -I_{3_s}\vec{p}_s s m_s\ ;\ q_{Y_s}I_t, -I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t\rangle \\
& \quad \pm\ C_s^{0\,2}\ C_t^{0\,2}\ (-1)^{I_J+I_s+I_t}\ (-1)^{q_{Y_s}+\bar{q}_{Y_s}-I_{3_s}-I_{3_t}} \\
& \quad |q_{Y_s}I_s, -I_{3_s}\vec{p}_s s m_s\ ;\ \bar{q}_{Y_s}I_t, -I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t\rangle\ \Big\} \\
= \quad & \pm(-1)^{I_{3_J}} \sum_{\substack{m_L,m_S\\ m_s,m_t\\ I_{3_s},I_{3_t}}} (Lm_LSm_S|JM)\ (sm_stm_t|Sm_S) \\
& \int d\Omega\ Y_{m_L}^L(\Omega)\ (I_s, -I_{3_s}I_t, -I_{3_t}|I_J, -I_{3_J}) \\
& \frac{1}{\sqrt{2}} \Big\{\ |q_{Y_s}I_s, -I_{3_s}\vec{p}_s s m_s\ ;\ \bar{q}_{Y_s}I_t, -I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t\rangle \\
& \quad \pm\ C_s^0\ C_t^0\ (-1)^{I_J+I_s+I_t} \\
& \quad |\bar{q}_{Y_s}I_s, -I_{3_s}\vec{p}_s s m_s\ ;\ q_{Y_s}I_t, -I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t\rangle\ \Big\} \\
= \quad & \pm(-1)^{I_{3_J}}\ |JMLSI_JI_{3_J}\rangle_{\mathrm{str}\pm}
\end{aligned} \tag{4.87}$$

Hier wurde im ersten Schritt die in (4.72) angegebene Wirkung des Operators $\hat{C}$ auf die Zweiteilchenzustände eingesetzt und mit Hilfe der Symmetriebeziehung (C.38) die Vorzeichen im Isospin–Clebsch–Gordan–Koeffizient vertauscht. Anschließend wurde ausgenutzt, daß $I_{3_J} = I_{3_s} + I_{3_t}$ und $\bar{q}_{Y_s} = -q_{Y_s}$ gilt. Wenn die dritte Komponente des Gesamtisospins (I_{3_J}) Null ist, dann ist der in Gleichung (4.85) definierte Zustand Eigenzustand zur Ladungskonjugation. Das Vorzeichen zwischen den Zweiteilchenzuständen bestimmt den Eigenwert des Zweiteilchenzustandes mit Gesamtspin J und Isospin I_J.

$$\hat{C}\ |JMLSI_J0\rangle_{\mathrm{str}\pm} \quad = \quad \pm\ |JMLSI_J0\rangle_{\mathrm{str}\pm} \tag{4.88}$$

Unabhängig davon, ob $I_{3_J} = 0$ gilt, ist der Zustand auch Eigenzustand zur G–Parität. Dies läßt sich durch Einsetzen der Wirkung des $\hat{G}$–Operators auf die Zweiteilchenzustände (4.73) und durch Zusammenfassen aller Vorzeichen beweisen:

$$\begin{aligned}
\hat{G}\ |JMLSI_JI_{3_J}\rangle_{\mathrm{str}\pm} \overset{4.73}{=} & \sum_{\substack{m_L,m_S\\ m_s,m_t\\ I_{3_s},I_{3_t}}} (Lm_LSm_S|JM)\ (sm_stm_t|Sm_S) \\
& \int d\Omega\ Y_{m_L}^L(\Omega)\ (I_sI_{3_s}I_tI_{3_t}|I_JI_{3_J}) \\
& \frac{1}{\sqrt{2}} \Big\{\ C_s^0\ C_t^0\ (-1)^{q_{Y_s}+\bar{q}_{Y_s}-I_s-I_t}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \qquad |\bar{q}_{Y_s} I_s I_{3_s} \vec{p}_s s m_s \; ; \; q_{Y_s} I_t I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t \rangle \\
& \quad \pm \;\; C_s^{0\,2} \, C_t^{0\,2} \, (-1)^{I_J + I_s + I_t} \, (-1)^{q_{Y_s} + \bar{q}_{Y_s} - I_s - I_t} \\
& \qquad |q_{Y_s} I_s I_{3_s} \vec{p}_s s m_s \; ; \; \bar{q}_{Y_s} I_t I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t \rangle \; \Big\} \\
= \;\; & \pm (-1)^{I_J} \sum_{\substack{m_L, m_S \\ m_s, m_t \\ I_{3_s}, I_{3_t}}} (L m_L S m_S | J M) \, (s m_s t m_t | S m_S) \\
& \int d\Omega \; Y^L_{m_L}(\Omega) \, (I_s I_{3_s} I_t I_{3_t} | I_J I_{3_J}) \\
& \frac{1}{\sqrt{2}} \Big\{ \; |q_{Y_s} I_s I_{3_s} \vec{p}_s s m_s \; ; \; \bar{q}_{Y_s} I_t I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t \rangle \\
& \qquad \pm \;\; C_s^0 \, C_t^0 \, (-1)^{I_J + I_s + I_t} \\
& \qquad |\bar{q}_{Y_s} I_s I_{3_s} \vec{p}_s s m_s \; ; \; q_{Y_s} I_t I_{3_t}, -\vec{p}_s t m_t \rangle \; \Big\} \\
= \;\; & \pm (-1)^{I_J} \; |J M L S I_J I_{3_J} \rangle_{\mathrm{str}\pm}
\end{aligned}
\tag{4.89}
$$

Die G–Parität des Zustandes hängt außer von dem bereits in Gleichung (4.88) auftretenden Vorzeichen auch noch vom Isospin I_J des Gesamtzustandes ab.

$$
\hat{G} \; |J M L S I_J I_{3_J} \rangle_{\mathrm{str}\pm} \;\; = \;\; \pm \, (-1)^{I_J} \;\; |J M L S I_J I_{3_J} \rangle_{\mathrm{str}\pm}
\tag{4.90}
$$

Das folgende Beispiel illustriert die im Zustand aus Gleichung (4.85) im Gegensatz zum Zustand leichter Mesonen ohne Flavor aus Gleichung (4.83) zusätzlich auftretenden Vorzeichen. Dazu soll nur der Flavor–abhängige Anteil des Zustandes betrachtet werden, das heißt nur die Summen über die dritten Komponenten der Isospins I_{3_s} und I_{3_t} in (4.85). Zur Beschreibung der in dieser Arbeit vorgestellten Reaktion $\bar{p}(1940\,\mathrm{MeV/}c)p \to K^+K^-\pi^0$ wird die $K^*(893)$–Resonanz benötigt, über die $\bar{p}p$–Anfangszustände in den Endzustand zerfallen können. Da das $K^*(893)$ in ein Kaon und ein Pion zerfällt, werden Zweiteilchenzustände aus K^* und K mit Gesamtspin J, Gesamtisospin $I_J (= 0, 1)$ und definierter C– und G–Parität zur Beschreibung der Zerfälle der Anfangszustände benötigt. Das $K^*(893)$ gehört zum 1^{--}–Nonett und das Kaon zum 0^{-+}–Nonett. Das Produkt aus C_s^0 und C_t^0 liefert daher ein zusätzliches Vorzeichen zwischen den Zweiteilchenzuständen im Gesamtzustand. Die Flavor–abhängigen Anteile der benötigten Zustände mit Gesamtisospin Null ($|I_J = 0, I_{3_J} = 0\rangle$) sind dann nach Gleichung (4.85) durch

$$
\begin{aligned}
|00\rangle^{G=\pm}_{C=\pm} \;\; = \;\; & \frac{1}{\sqrt{2}} \Big\{ \;\; (\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}|00) \Big[\, |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}; \tfrac{-1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle \pm |\tfrac{-1}{2}\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle \, \Big] \\
& \qquad + \;\; (\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}|00) \Big[\, |\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}; \tfrac{-1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle \pm |\tfrac{-1}{2}\tfrac{-1}{2}; \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle \, \Big] \Big\} \\
= \;\; & \frac{1}{2} \Big\{ \, |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}; \tfrac{-1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle \pm |\tfrac{-1}{2}\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle \mp |\tfrac{-1}{2}\tfrac{-1}{2}; \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle \; - |\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}; \tfrac{-1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle \Big\}
\end{aligned}
\tag{4.91}
$$

gegeben. Das obere Vorzeichen gilt für den Fall $C = G = +$, das untere für $C = G = -$. Für Zustände mit Gesamtisospin Eins ($|I_J = 1, I_{3_J} = 0\rangle$) ergibt sich bei gleicher Vorgehensweise

$$
|10\rangle^{G=\mp}_{C=\pm} \;\; = \;\; \frac{1}{2} \Big\{ \, |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}; \tfrac{-1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle + |\tfrac{-1}{2}\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle \mp |\tfrac{-1}{2}\tfrac{-1}{2}; \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle \; \mp |\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}; \tfrac{-1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle \Big\}
\tag{4.92}
$$

Hier gilt das obere Vorzeichen für den Fall $C = +\; G = -$, das untere für $C = -\; G = +$. Werden anstelle der Quantenzahlen in die obigen Gleichungen die Namen der Teilchen eingetragen, dann ergeben sich (gegebenenfalls bis auf ein globales Vorzeichen) die zum Beispiel in [47] oder in [46] angegebenen Gleichungen:

$$|00\rangle_{C=\pm}^{G=\pm} = \frac{1}{2}\left\{ |K^{*+};K^-\rangle \pm |\bar{K}^{*0};K^0\rangle \mp |K^{*-};K^+\rangle - |K^{*0};\bar{K}^0\rangle \right\} \tag{4.93}$$

$$|10\rangle_{C=\pm}^{G=\mp} = \frac{1}{2}\left\{ |K^{*+};K^-\rangle + |\bar{K}^{*0};K^0\rangle \mp |K^{*-};K^+\rangle \mp |K^{*0};\bar{K}^0\rangle \right\} \tag{4.94}$$

4.2.5.4 Zweiteilchenzerfälle

Wenn der zerfallende Zustand eine definierte C– und/oder G–Parität hat, dann bleiben diese in starken Zerfällen erhalten. Wenn der Zweiteilchenzustand aus den Zerfallsprodukten eine andere C– und/oder G–Parität hat, dann ist der Zerfall verboten. Für die partiellen Zerfallsamplituden ergeben sich keine weiteren Bedingungsgleichungen. Wenn beide Zerfallsprodukte äußere Strangeness (Hyperladung) haben, dann muß der Normierungsfaktor $\sqrt{1/2}$ und das in (4.86) definierte relative Vorzeichen $\mathrm{sgn}(C, G, q_{Y_s}, q_{Y_t})$ zwischen den Zweiteilchenzuständen in dem „symmetrisierten" Zustand (4.85) berücksichtigt werden. Zu jedem bestimmten Isospin–Clebsch–Gordan–Koeffizienten $c^{s,t}_{I_J,I_{3_J}}$ aus (4.55) gehört daher ein zusätzlicher von den Hyperladungen abhängiger Faktor $f(C, G, q_{Y_s}, q_{Y_t})$, der für den ersten Zweiteilchenzustand im Gesamtzustand aus (4.85) gleich $\sqrt{1/2}$ ist und für den zweiten Zweiteilchenzustand durch

$$f(C, G, q_{Y_s}, q_{Y_t}) \stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{sgn}(C, G, q_{Y_s}, q_{Y_t}) \tag{4.95}$$

gegeben ist. Die partiellen Zerfallsamplituden brauchen nicht nach der C– oder der G–Parität spezifiziert werden. Für die partiellen Zerfallsamplituden eines Zustandes X mit $C = 1$, $G = -1$, $I = 1$ und $I_3 = 0$, der in ein $K^*(893)$ und ein Kaon zerfällt, folgt aus Gl. (4.94):

$$\tfrac{1}{2}\alpha^{X,K^*,K}_{\lambda_{K^*},\lambda_K} = \tfrac{1}{2}\alpha^{X,K^{*+},K^-}_{\lambda_{K^*},\lambda_K} = \tfrac{1}{2}\alpha^{X,\bar{K}^{*0},K^0}_{\lambda_{K^*},\lambda_K} = -\tfrac{1}{2}\alpha^{X,K^{*-},K^+}_{\lambda_{K^*},\lambda_K} = -\tfrac{1}{2}\alpha^{X,K^{*0},\bar{K}^0}_{\lambda_{K^*},\lambda_K} \tag{4.96}$$

4.3 Anfangszustände

4.3.1 Produktion der Anfangszustände

Die Produktion eines Anfangszustandes ($a + b \to J$) kann als inverser Zerfall aufgefaßt werden. Die Gesamtenergie des Anfangszustandes ist durch die Impulse und die Ruhemassen der Strahlteilchen (a, b) fest vorgegeben. Die Winkel $\Omega^J_{a,b} = \left(\theta^J_{a,b}, \phi^J_{a,b}\right)$ sind ebenfalls fest, da die erste z–Achse, bezüglich der die Helizität $M = \lambda_a - \lambda_b$ des Anfangszustandes angegeben wird, frei gewählt werden kann. In Abb.4.1 wurde die Strahlachse als Quantisierungsachse gewählt. In diesem Fall sind beide Winkel Null $\Omega^J_{a,b} = (0, 0)$. Jede Produktionsamplitude kann als komplex konjugierte Zerfallsamplitude geschrieben werden,

$$\Pi^J_{\lambda_a,\lambda_b} = {\alpha^J}^*_{\lambda_a,\lambda_b} \tag{4.97}$$

wobei λ_a und λ_b die Helizitäten der Strahlteilchen sind. Wenn die Parität im Produktionsprozeß erhalten bleibt, dann gilt (4.44) auch für die partiellen Produktionsamplituden $(\Pi^J_{\lambda_a,\lambda_b})$.

4.3.2 Fermion–Antifermion–Anfangszustände

Die in Kapitel 4.2.5.3 diskutierten Zweiteilchenzustände für Teilchen und Antiteilchen geben die erlaubten Produktionsamplituden vor. Damit sind die möglichen Quantenzahlen–Kombinationen J^{PC} für den Anfangszustand $|JM\rangle$ in Abbildung 4.1 festgelegt. Da beide Primärteilchen der Reaktion $(a,\, b)$ Fermionen sind, können zwei verschiede Gesamtspins $S_{a,b}$ angenommen werden: $S_{a,b} = 0$ und $S_{a,b} = 1$. Die Anfangszustände werden nach den zwei unterschiedlichen Multiplizitäten μ

$$\mu \;=\; 2S_{a,b} + 1 \tag{4.98}$$

eingeteilt. Die Zustände mit $S_{a,b} = 0$ ($\Rightarrow \mu = 1$) werden Singulett–Zustände, diejenigen mit $S_{a,b} = 1$ ($\Rightarrow \mu = 3$) werden Triplett–Zustände genannt. Zusammen mit dem relativen Bahndrehimpuls $L_{a,b}$ $(= 0, 1, 2, \cdots)$ sind die Parität P_J und die C-Parität C_J eines jeden möglichen Anfangszustandes mit Gesamtdrehimpuls J durch die Gleichungen (4.79) und (4.82) festgelegt. Durch die Umkopplungsgleichung (4.21) erhält man für Singulett–Zustände:

$$\begin{aligned} S &= 0 \\ J &= 0, 1, 2, \cdots \\ \lambda_{a,b} &= 0 \\ P_J &= (-1)^{L_{a,b}+1} = (-1)^{J+1} \\ C_J &= (-1)^{L_{a,b}} = (-1)^{J} = -P_J \end{aligned} \tag{4.99}$$

Die Triplett–Zustände benötigen eine weitergehende Betrachtung. Ist wegen der Paritätserhaltung nur ein $L_{a,b}$ zu einem bestimmten J möglich, dann sind nur die Helizitäten $\lambda_{a,b} = \lambda_a - \lambda_b = \pm 1$ erlaubt, und die beiden entsprechenden Produktionsamplituden sind nach (4.44) zueinander proportional. Für diese Triplett–Zustände gilt

$$\begin{aligned} S &= 1 \\ J &= 1, 2, \cdots \\ \lambda_{a,b} &= \pm 1 \\ P_J &= (-1)^{L_{a,b}+1} = (-1)^{J+1} \\ C_J &= (-1)^{L_{a,b}+1} = (-1)^{J+1} = P_J \end{aligned} \tag{4.100}$$

Sind hingegen zwei verschiedene relative Bahndrehimpulse $L_{a,b}$ (beide gerade oder beide ungerade) zu einem J erlaubt, dann muß es auch zwei voneinander unabhängige Helizitäts–Produktionsamplituden geben, eine für die Helizität $\lambda_{a,b} = 0$ und eine für $\lambda_{a,b} = \pm 1$.

$$\begin{aligned} S &= 1 \\ J &= 0, 1, 2, \cdots \\ \lambda_{a,b} &= 0, \pm 1 \\ P_J &= (-1)^{J} \\ C_J &= (-1)^{J} = P_J \end{aligned} \tag{4.101}$$

Eine Ausnahme in dieser Gruppe ist der Anfangszustand $J^{PC} = 0^{++}$, da dieser nur die Gesamthelizität $\lambda = 0$ besitzen kann. Entsprechend ist in diesem Fall nur $L_{a,b} = 1$ erlaubt. Die Anfangszuände sind in Tab.4.1 bis $J_{\max} = 6$ explizit angegeben.

J	Singulett $\lambda = 0$	J^{PC}	Triplett $\lambda = \pm 1$	J^{PC}	Triplett $\lambda = \pm 1, 0$	J^{PC}
0	$^1S_0$	0^{-+}			$^3P_0$	0^{++}
1	$^1P_1$	1^{+-}	$^3P_1$	1^{++}	$^3S_1, ^3D_1$	1^{--}
2	$^1D_2$	2^{-+}	$^3D_2$	2^{--}	$^3P_2, ^3F_2$	2^{++}
3	$^1F_3$	3^{+-}	$^3F_3$	3^{++}	$^3D_3, ^3G_3$	3^{--}
4	$^1G_4$	4^{-+}	$^3G_4$	4^{--}	$^3F_4, ^3H_4$	4^{++}
5	$^1H_5$	5^{+-}	$^3H_5$	5^{++}	$^3G_5, ^3I_5$	5^{--}
6	$^1I_6$	6^{-+}	$^3I_6$	6^{--}	$^3H_6, ^3J_6$	6^{++}

Tabelle 4.1: **Fermion–Antifermion–Anfangszustände.**
Die erste Spalte gibt den Gesamtdrehimpuls J des Systems an. Die Spins der Primärteilchen a, b werden zum Gesamtspin $S_{a,b} = a \oplus b$ gekoppelt. Der Spin $S_{a,b}$ bestimmt die Multiplizität μ (Singulett, Triplett). Die möglichen relativen Bahndrehimpulse $L_{a,b}$ sind in spektrokopischer Bezeichnung in den Namen der Zustände enthalten, d.h. S, P, D, F, G, H, $I \cdots$ für $L_{a,b} = 0, 1, 2, 3 \cdots$.

4.3.3 Proton–Antiproton–Anfangszustände

Zur vollständigen Beschreibung der Proton–Antiproton–Anfangszustände fehlen noch der Isospin $I_{p\bar{p}}$ und die G–Parität $G_{p\bar{p}}$. Ist der Isospin einer der Fermion–Antifermion–Anfangszustände aus Tabelle 4.1 festgelegt, dann ist es nach Gleichung (4.81) auch die G–Parität

$$G_{p\bar{p}} \quad = \quad (-1)^{I_{p\bar{p}}} C_{p\bar{p}}$$

Allerdings hat ein System aus Proton und Antiproton keinen definierten Isospin. Die Anfangszustände sind eine Mischung aus den Isospinzuständen $|00\rangle$ und $|10\rangle$. Da der Produktionsmechanismus weitgehend unbekannt ist, kann das Mischungsverhältnis lediglich durch zwei reelle Zahlen i_0 und i_1 (mit $i_1^2 + i_2^2 = 1$) ausgedrückt werden

$$|p\bar{p}(J^{PC})\rangle \quad = \quad i_0 \left(J^{PC}\right) |00\rangle + i_1 \left(J^{PC}\right) |10\rangle \quad , \qquad (4.102)$$

die im allgemeinen für jeden Anfangszustand verschieden sind und außerdem noch Energie– beziehungsweise Strahlimpuls–abhängig sein können. In den meisten Fällen wird durch die Messung eine der beiden Isospin–Komponenten herausprojiziert, da viele der beobachteten Endzustände einen definierten Isospin besitzen. Zum Beispiel haben die in dieser Arbeit vorgestellten Endzustände $\pi^0\pi^0\pi^0$ und $\eta\eta\pi^0$ beide den Gesamtisospin Eins. Die Isospin–0–Komponenten der Anfangszustände können nicht zu diesen Endzustände beitragen. Eine Bestimmung der Isospinanteile im $\bar{p}p$–System ist nur in Analysen mit gekoppelten Kanälen möglich, in denen verschiedene Endzustände mit unterschiedlichen Isospins gleichzeitig angepaßt werden. In solchen Analysen machen sich verschiedene Anteile der Isospins der Anfangszustände durch unterschiedliche Interferenzeffekte bemerkbar. Wird nur ein einzelner Endzustand analysiert, dann können die Zahlen i_0 und i_1 in den Produktionsamplituden absorbiert werden und brauchen nicht mit einem freien Parameter angepaßt werden. Dies gilt auch für Endzustände, die keinen definierten Isospin besitzen. Insbesondere werden für die Isospinanteile der Anfangszzustände der in dieser Arbeit vorgestellten Reaktionen $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV}/c)\,p \to K^+K^-\pi^0$ keine freien Parameter benötigt. Dennoch ist die Anpassung eines Endzustandes mit undefiniertem Isospin erheblich schwieriger, da insgesamt mehr Parameter zur Beschreibung der Reaktion benötigt werden. Dies liegt daran, daß bedeutend mehr Resonanzen und Anfangszustände zum Endzustand beitragen können. Dies sei an dem speziellen Endzustand $K^+K^-\pi^0$ verdeutlicht. Sowohl a–Mesonen als auch f–Mesonen können in der Zerfallsmode K^+K^- zum Endzustand beitragen, da ein K^+K^-–Paar keinen eindeutigen Isospin besitzt. Da auch der Anfangszustand den Isospin des K^+K^-–Paares nicht festlegt, kann in diesem Fall nicht zwischen a– und f–Mesonen unterschieden werden. Zudem können in der Zerfallsmode $K^\pm\pi^0$ Kaon–Resonanzen mit beliebigem Spin beitragen, zum Beispiel das $K^*(893)$. Aus diesem Grund ist **jeder** der in Tabelle 4.1 gezeigten Anfangszustände möglich, denn jeder der Anfangszustände darf in ein $K_1^{*\pm}K^\mp$–Paar oder in ein $K_2{}^\pm K^\mp$–Paar zerfallen.

4.4 Dynamik der partiellen Amplituden

Die Herleitung der Amplituden im vorhergehenden Kapitel zeigt, daß die Winkelabhängigkeit der Amplituden faktorisiert werden kann. Die Energieabhängigkeit der Amplituden ist in den Definitionen der partiellen Amplituden versteckt. Die partiellen Zerfallsamplituden $\alpha^J_{\lambda_s,\lambda_t}$ (4.26) und $A^J_{L,S}$ (4.28) können daher, wie es bereits der Phasenraumfaktor ρ_s in den Definitionen andeutet, als Funktionen der invarianten Masse m_J und des Aufbruchimpulses p_s ausgedrückt werden. Da der Operator $\hat{M}$ rotationsinvariant ist [48], können die partiellen Amplituden bezüglich der diskreten Variablen nur von den rotationsinvarianten Größen J, λ_s und λ_t, beziehungsweise J, L und S abhängen, jedoch nicht von M.

4.4.1 S–, T– und K–Matrix

Der nun folgende Ausflug in die Streutheorie soll lediglich die Parametrisierung der Dynamik motivieren und deren Grenzen aufzeigen. Zu diesem Zweck sei Abbildung 4.1 als Streuprozeß betrachtet. Der Übergang des Anfangszustandes $|i\rangle = |a,b\rangle$ in den Endzustand $|f\rangle = |s,t\rangle$ wird durch den Streuoperator $\hat{S}$ vermittelt.

$$|f\rangle = \hat{S}|i\rangle \tag{4.103}$$

Die Übergangsamplitude S_{fi} für den Streuprozeß $a+b\to s+t$ wird Streumatrix genannt.

$$S_{fi} = \langle f|i\rangle \tag{4.104}$$

Die Norm der Zustände vor und nach der Streuung darf sich nicht ändern, da bei einem Streuprozeß die einlaufende Intensität gleich der auslaufenden Intensität sein muß. Der Streuoperator $\hat{S}$ ist demnach unitär:

$$\hat{S}\hat{S}^\dagger = \hat{S}^\dagger\hat{S} = \hat{E} \tag{4.105}$$

Hierbei bezeichnet $\hat{E}$ die Identität. Der Streuoperator kann formal in einen wechselwirkenden und einen nicht wechselwirkenden Anteil zerlegt werden. Bei Streuprozessen wird der wechselwirkende Anteil durch den Lorentz–invarianten Übergangsoperator ($\hat{T}$) beschrieben. Unter Berücksichtigung der Normierung der Zweiteilchenzustände (4.9, 4.18, 4.20) und Abseparierung von Phasenraumfaktoren, kann $\hat{S}$ durch

$$\hat{S} = \hat{E} + 2\imath\sqrt{\hat{\rho}}\hat{T}\sqrt{\hat{\rho}} \tag{4.106}$$

ausgedrückt werden. Der Faktor $2\imath$ ist lediglich Konvention. $\hat{\rho}$ ist die Phasenraumdichte–Matrix, die für n erlaubte Kanäle eine $n\times n$–Diagonalmatrix ist, mit den jeweiligen Zweiteilchen–Phasenraumfaktoren (ρ_s) auf der Diagonalen. Der Fall $n = 1$ wird elastische

Streuung genannt. Ein Beispiel hierfür ist die $\pi\pi$–Streuung, bei der sowohl die Primärteilchen (a, b) als auch die Endzustandsteilchen (s, t) Pionen sind. Alle Wechselwirkungen werden vom $\hat{T}$–Operator erfaßt. Dazu gehören insbesondere die Wechselwirkungen, die zur Produktion und zum Zerfall von Resonanzen führen. Nun ist es häufig der Fall, daß eine Resonanz in einem Kanal erzeugt wird (z.B. $\pi\pi$), aber in einen anderen Kanal zerfällt (z.B. $K\bar{K}$). Dann beinhaltet $\hat{T}$ auch Inelastizitäten. Wird in diesem Fall nur ein Kanal $(n = 1)$ berücksichtigt, dann wird die Unitarität von $\hat{S}$ verletzt. Aus diesem Grund sollten, wenn immer möglich, alle Kanäle gleichzeitig in einer gekoppelten Analyse beschrieben werden. Aus der Unitarität des Streuoperators (4.105) und der definierenden Gleichung (4.106) folgt, daß $\hat{T}$ im Allgemeinen nicht unitär ist. Außerdem ist $\hat{T}$ nur dann hermitesch, wenn der Operator identisch verschwindet. Um eine einfache unitäre Parametrisierung der Dynamik zu erhalten, wird daher der $\hat{K}$–Operator zu

$$\hat{K}^{-1} \;=\; \hat{T}^{-1} + \imath\hat{\rho} \tag{4.107}$$

definiert. Aus der Unitarität von $\hat{S}$ folgt, daß der $\hat{K}$–Operator hermitesch ist. Wird auch noch Zeitumkehr–Invarianz für $\hat{S}$ gefordert, dann ist der $\hat{K}$–Operator reell und symmetrisch. Der $\hat{T}$–Operator kann durch $\hat{K}$ ausgedrückt werden

$$\hat{T} \;=\; \hat{K}(\hat{E} - \imath\hat{\rho}\hat{K})^{-1} = (\hat{E} - \imath\hat{\rho}\hat{K})^{-1}\hat{K} \tag{4.108}$$

Die invariante K–Matrix soll nun in der Approximation der Dominanz resonanter Amplituden [21] parametrisiert werden. Resonanzen werden dabei als Pole in der K–Matrix eingeführt. Der Ansatz

$$K_{ij} \;=\; \sum_\alpha \frac{g_{\alpha,i}(s) g_{\alpha,j}(s)}{(m_\alpha^2 - s)\sqrt{\rho_i}\sqrt{\rho_j}} \tag{4.109}$$

leistet das gewünschte. Sind die Kopplungen g reellwertige Funktionen, so ist die K–Matrix K_{ij} reel und symmetrisch. Hierbei bezeichnet der Index α die Resonanzen, das heißt m_α ist die Sollmasse der Resonanz α. Die Kopplungen an den Anfangs– $(g_{\alpha,i}(s))$ und den Endzustand $(g_{\alpha,j}(s))$ sind Funktionen der Mandelstamm–Variablen s. Diese ist gleich der invarianten Masse des Anfangszustandes J zum Quadrat m_J^2 (kurz m^2). Die Kopplungen selbst werden wie folgt definiert

$$g_{\alpha,i}(m) \;=\; \sqrt{\frac{m_\alpha \Gamma_{\alpha,i}}{\rho_{\alpha,i}}} B_{L_i}(p_i, p_{\alpha,i}) \sqrt{\rho_i} \tag{4.110}$$

Hierbei bezeichnen die $\Gamma_{\alpha,i}$ die beobachteten Partialbreiten und $p_{\alpha,i}$ den Impuls der Resonanz α im i–ten Kanal. Auf die Funktionen $B_{L_i}(p_i, p_{\alpha,i})$ (Blatt–Weiskopf–Faktoren) wird später eingegangen. Mit dieser Definition lautet die Parametrisierung der K–Matrix

$$K_{ij} \;=\; \sum_\alpha \frac{m_\alpha \sqrt{\frac{\Gamma_{\alpha,i}\Gamma_{\alpha,j}}{\rho_{\alpha,i}\rho_{\alpha,j}}} B_{L_i}(p_i, p_{\alpha,i}) B_{L_j}(p_j, p_{\alpha,j})}{(m_\alpha^2 - m^2)} \tag{4.111}$$

Für nur einen Kanal $(i = j = 1)$ und nur eine Resonanz reduziert sich die K-Matrix auf

$$K_{11} \;=\; \frac{m_\alpha \frac{\Gamma_\alpha}{\rho_\alpha} B_L^2(p, p_\alpha)}{(m_\alpha^2 - m^2)} = \frac{m_\alpha \Gamma_\alpha^0 B_L^2(p, p_\alpha)}{(m_\alpha^2 - m^2)} \tag{4.112}$$

[21] Nichtresonante Mechanismen können im Nachhinein durch Addition eines beliebigen Polynoms der Schwerpunktsenergie $s = m_J^2$ hinzugefügt werden. Die einfachste Wahl ist die Addition einer Konstanten c_{ij}, die bei einer Anpassung bestimmt werden muß.

Wird der letzte Ausdruck für K in (4.108) eingesetzt, dann ergibt sich für die T–Matrix eine relativistische Breit–Wigner–Form

$$T_{11} = \frac{m_\alpha \Gamma_\alpha^0 B_L^2\left(p, p_\alpha\right)}{(m_\alpha^2 - m^2) - i\rho m_\alpha \Gamma_\alpha^0 B_L^2\left(p, p_\alpha\right)} \tag{4.113}$$

4.4.2 F– und P–Vektor Ansatz

Der K–Matrix–Ansatz beschreibt die Resonanzproduktion in einer Zweikörperstreuung. Eine ad hoc Produktion von Resonanzen mit einem mehr oder weniger unbeteiligten Zuschauer, wie sie in der $\bar{p}p$–Annihilation angenommen wird, wird im K–Matrix Ansatz nicht berücksichtigt. Eine mögliche Erweiterung bietet der P–Vektor–Ansatz [49]. Dabei wird die $n \times n$-Übergangsmatrix (T) ersetzt durch einen n–spaltigen Übergangsvektor F. Der $\hat{F}$–Operator setzt sich zusammen aus einem Produktionsoperator $\hat{P}$, der ebenfalls als n–spaltiger Vektor dargestellt werden kann, und einer Zweikörper–Endzustandswechselwirkung, wie sie bereits im K–Matrix Formalismus auftritt. In Analogie zu (4.108) lautet die Definition des $\hat{F}$–Operators in Lorentz–invarianter Form

$$\hat{F} = (\hat{I} - \imath\hat{\rho}\hat{K})^{-1}\hat{P} \tag{4.114}$$

Der P–Vektor soll dieselbe Polstruktur wie die K–Matrix besitzen, damit sich im Fall von nur einer Resonanz und nur einem erlaubten Kanal wieder eine relativistische Brei–Wigner–Form ergibt. Aus diesem Grund wird der P–Vektor zu

$$P_i = \sum_\alpha \frac{\beta_\alpha g_{\alpha,i}(m)}{(m_\alpha^2 - m^2)\sqrt{\rho_i}} \tag{4.115}$$

definiert. Die komplexen Kopplungen β_α nehmen dabei die gesamte Unkenntnis über den Produktionsmechanismus auf und müssen als freie Parameter angepaßt werden. Es steht daher frei, die β_α wie folgt zu skalieren:

$$\beta_\alpha = \beta_\alpha^0 \sqrt{m_\alpha \Gamma_\alpha^0} \tag{4.116}$$

Werden diese β_α und die reellen Kopplungen $g_{\alpha,i}(m)$ aus (4.110) in P_i eingesetzt, dann ergibt sich:

$$P_i = \sum_\alpha \frac{\beta_\alpha^0 m_\alpha \sqrt{\frac{\Gamma_\alpha^0 \Gamma_{\alpha,i}}{\rho_{\alpha,i}}} B_{L_i}\left(p_i, p_{\alpha,i}\right)}{(m_\alpha^2 - m^2)} \tag{4.117}$$

Wird nur eine einzige Resonanz produziert, die auch nur in einen einzigen Kanal zerfällt, so lautet der P–Vektor

$$P_1 = \frac{\beta_\alpha^0 m_\alpha \Gamma_\alpha^0 B_L\left(p, p_\alpha\right)}{(m_\alpha^2 - m^2)} \tag{4.118}$$

Dementsprechend nimmt anlog zu (4.113) mit Hilfe von (4.112) die Übergangsamplitude F ebenfalls eine relativistische Breit–Wigner–Form an

$$F_1 = \beta^0 \frac{m_\alpha \Gamma_\alpha^0 B_L\left(p, p_\alpha\right)}{(m_\alpha^2 - m^2) - i\rho m_\alpha \Gamma_\alpha^0 B_L^2\left(p, p_\alpha\right)} \tag{4.119}$$

4.4.3 Amplitudenverhalten an der Schwelle

Der wichtigste Grund für die willkürliche Einführung der Funktionen $B_L(p, p_\alpha)$ in der Definition der Kopplungen (4.110) ist das Schwellenverhalten der Amplitude. Direkt an der Schwelle ist der Aufbruchimpuls p gleich Null[22]. Also muß die Übergangsamplitude an der Schwelle verschwinden. Werden die B_L zu Eins gesetzt, dann hat sowohl die Amplitude im K–Matrix–Ansatz als auch im P–Vektor–Ansatz einen endlichen Wert an der Schwelle. Besonders einfach zu sehen ist dies im Fall eines Kanals und nur einer Resonanz (4.113, 4.119). In beiden Fällen wäre nur der Imaginärteil des Nenners gleich Null. Das falsche Verhalten an der Schwelle wird durch die Funktionen $B_L(p, p_\alpha)$ korrigiert. Allgemein kann gezeigt [50, 51][23] werden, daß die invariante Übergangsamplitude A in der Zweiteilchenstreuung folgendes Verhalten in der Nähe Schwelle hat:

$$A \quad \propto \quad ap^{2L} + ibp^{4L+1} \;\text{ für }\; p \to 0 \tag{4.120}$$

Das Verhalten der T–Amplitude für $p \to 0$ läßt sich im K–Matrix Ansatz studieren, wenn (4.113) mit dem komplex konjugierten Zähler erweitert und im sich ergebenden reelen Zähler der p–abhängige Anteil gegenüber $(m_\alpha^2 - m^2)^2$ vernachlässigt wird. Dann läßt sich die Proportionalität

$$T \quad \propto \quad a' B_L^2(p, p_\alpha) + ib' p B_L^4(p, p_\alpha) \;\text{ für }\; p \to 0 \tag{4.121}$$

ablesen. Wenn die Funktionen B_L proportional zu p^L sind, dann ergibt sich die gewünschte Proportionalität (4.120). Da im F–Vektor–Ansatz im Zähler der Amplituden B_L steht, im Gegensatz zu B_L^2 im K–Matrix–Ansatz, müssen in diesem Fall die Funktionen B_L proportional zu p^{2L} gewählt werden. Dies wird erreicht, in dem die Funktionen B_L mit den Argumenten p^2 und p_0^2 berechnet werden.
Beide Ansätze weisen für $L = 0$ dieselbe Schwäche auf. Die Blatt–Weisskopf–Faktoren sind dann konstant, aber ungleich Null. Daher verschwinden weder die Amplitude (4.113), noch die Amplitude (4.119) an der Schwelle. Insbesondere skalare Resonanzen, die nur mit $L = 0$ zerfallen, sind davon stark betroffen, wenn sie in der Nähe einer sich scharf öffnenden Schwelle erzeugt werden. Ein extremes Beispiel ist das $f_0(975)$, in dessen unmittelbarer Nähe sich die $\bar{K}K$–Schwelle befindet. Wenn das $f_0(975)$ einen starken Beitrag in einem beobachteten Endzustand hat, dann ist eine Beschreibung des Spektrums mit Hilfe einer Breit–Wigner–Form für das $f_0(975)$ unzulässig. Die Näherung wird jedoch umso besser, je größer die Breite der Tochterteilchen ist, denn in diesem Falle wird die Schwelle „aufgeweicht“. Ein Beispiel hierfür ist der Zerfall $f_0(1500) \to \rho\rho$ ($2m_\rho = 1540\,\mathrm{MeV}/c^2$).
Ein weiterer wichtiger Effekt der Funktionen B_L ist, daß sie die Linienform in den beobachteten Wirkungsquerschnitten beeinflussen und zu mehr oder weniger großen Abweichungen von der symmetrischen Breit–Wigner–Form für $B_L \equiv 1$ führen.
Die genaue Form der Blatt–Weisskopf Faktoren B_L wird zumeißt aus Potentialrechnungen gewonnen. Diese ergeben für punktförmige Mesonen einfach $B_L = p^L$. Godfrey und Isgur [52] benutzen ein relativistisches Oszillator–Potential und erhalten einen Ausdruck der Form

$$B_L(p) = \frac{e^{-\frac{p^2}{c}}}{p} \;\text{ mit }\; c \approx 2\left[\tfrac{GeV}{c}\right]^2$$

Andere Modelle, zum Beispiel das Veneziano Modell [53] oder Ableitungen aus Regge Trajektorien [54], ergeben einen direkten Zusammenhang mit dem Gesamtspin J (anstelle

[22] Siehe Gleichung (C.42) in Anhang C.7.

[23] Hier sei insbesondere auf den von Burkhardt [50] angeführten Beweis verwiesen, da er nicht auf (nicht relativistische) Potentialmodelle zurückgreift.

des relativen Bahndrehimpulses L). Die für diese Analyse verwendeten Funktionen für den Zerfall von Mesonen sind diejenigen von Quigg und Hippel [55], die proportional zum Kehrwert der sphärischen Besselfunktionen der 3.Art sind, da diese die beste Beschreibung der Linienform ergeben. Die genaue Form der Funktionen $B_L(p, p_0)$ kann Anhang C.9 entnommen werden. Die daraus resultierenden Funktionen für die gesamte Dynamik sind in Anhang C.10 angegeben. Alle in dieser Arbeit vorgestellten Analysen benutzen ausschließlich die Form (C.68).

4.5 Sequentielle Zweikörperzerfälle

Nun mögen die Teilchen s und t, wie in Abb.4.1 gezeigt, ihrerseits in zwei Teilchen zerfallen. Der explizite Ausdruck A_{Kette} zur Beschreibung der Zerfallskette $J \to s+t, s \to s_1+s_2, t \to t_1+t_2$ für festes M und I_{3_J} lautet:

$$\begin{aligned}
A_{\text{Kette}} \quad = \quad & \sum_{\substack{\lambda_s,\lambda_t \\ I_{3_s}, I_{3_t}}} (I_s I_{3_s} I_t I_{3_t} | I_J I_{3_J}) \quad \alpha^J_{\lambda_s,\lambda_t} D^{J^*}_{M,\lambda_s-\lambda_t}(\Omega^s_J) \\
& \left(\sum_{\substack{\lambda_{s_1},\lambda_{s_2} \\ I_{3_{s_1}}, I_{3_{s_2}}}} (I_{s_1} I_{3_{s_1}} I_{s_2} I_{3_{s_2}} | I_s I_{3_s}) \quad \alpha^s_{\lambda_{s_1},\lambda_{s_2}} D^{s^*}_{\lambda_s,\lambda_{s_1}-\lambda_{s_2}}(\Omega^{s_1}_s) \times (\cdots) \right) \\
& \left(\sum_{\substack{\lambda_{t_1},\lambda_{t_2} \\ I_{3_{t_1}}, I_{3_{t_2}}}} (I_{t_1} I_{3_{t_1}} I_{t_2} I_{3_{t_2}} | I_t I_{3_t}) \quad \alpha^t_{\lambda_{t_1},\lambda_{t_2}} D^{t^*}_{\lambda_t,\lambda_{t_1}-\lambda_{t_2}}(\Omega^{t_1}_t) \times (\cdots) \right)
\end{aligned} \tag{4.122}$$

Der Kürze halber wurde hier die spezielle Symmetrisierung (bzgl. C- und G-Parität) für Teilchen mit Strangeness weggelassen. In Gleichung 4.122 ist besonders zu beachten, daß die zu den jeweiligen D–Funktionen gehörenden Winkel Ω^σ_ι auf unterschiedliche Bezugssysteme bezogen sind, nämlich auf die Ruhesystemen der zerfallenden Zustände ι. Die explizite Berechnung der Winkel ist in der Formelsammlung C.8 erläutert. Außerdem sind für alle Subzerfälle (z.B. $J \to s+t$) die Helizitäten (λ_s, λ_t) durch den Zerfall des Mutterzustandes (J) fest vorgegeben. Die symmetrische Form der Subzerfälle in der Amplitude (4.122) legt nahe was zu tun ist, wenn die Kette einfacher oder komplizierter ist. Wenn t ein stabiles Teilchen ist, wie bei allen in dieser Arbeit vorgestellten Endzuständen der $\bar{p}p$-Annihilation, dann muß lediglich die Summe in der zweiten Klammer durch eine eins ersetzt werden. Sollte auch noch s_1 (t_1) oder s_2 (t_2) zerfallen, dann erscheint innerhalb der ersten (zweiten) Klammer ein neues Produkt desselben Typs. Gleichung (4.122) kann auch in einer etwas anderen Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
A_{\text{Kette}} \quad = \quad & \sum_k F(C_k, G_k) \quad C^k_{I_J,I_{3_J}} \sum_{\lambda_s,\lambda_t} \alpha^J_{\lambda_s,\lambda_t} D^{J^*}_{M,\lambda_s-\lambda_t}(\Omega^s_J) \\
& \left(\sum_{\lambda_{s_1},\lambda_{s_2}} \alpha^s_{\lambda_{s_1},\lambda_{s_2}} D^{s^*}_{\lambda_s,\lambda_{s_1}-\lambda_{s_2}}(\Omega^{s_1}_s) \times (\cdots) \right) \\
& \left(\sum_{\lambda_{t_1},\lambda_{t_2}} \alpha^t_{\lambda_{t_1},\lambda_{t_2}} D^{t^*}_{\lambda_t,\lambda_{t_1}-\lambda_{t_2}}(\Omega^{t_1}_t) \times (\cdots) \right)
\end{aligned} \tag{4.123}$$

Hierbei steht der Summationsindex k für einen bestimmten, kompletten, kombinatorischen Fall bezüglich der dritten Komponenten des Isospins, der Hyperladungen und der

Baryonenzahlen in der gesamten Kette. $C^k_{I_J,I_{3_J}}$ steht für ein Produkt aus Isospin–Clebsch–Gordan–Koeffizienten (jeweils einen pro Zerfall) für eine solche kombinatorische Kette, und $F(C_k, G_k)$ steht für ein Produkt aus zusätzlichen Faktoren $f(C, G)$ (siehe Gl. (4.95) in Kapitel 4.2.5.4), das im Falle von Teilchen mit Strangeness für die Symmetrisierung bezüglich der C– und der G–Parität benötigt wird.

4.6 Interferenzen

Mehrere Anfangszustände mit verschiedenen Quantenzahlen $(J^{PC}I^G)$ können über verschiedene Resonanzen in den gleichen Endzustand zerfallen. Jeder einzelne Prozeß hat eine eigene Amplitude. Die Amplituden müssen entweder kohärent oder inkohärent addiert werden, um den Wirkungsquerschnitt beziehungsweise die Gewichtsfunktion w für die Reaktion zu erhalten.

4.6.1 Behandlung der Endzustände

Sei ein Anfangszustand $|J^{PC}I^GM\rangle$ mit beliebigen, aber festen, Quantenzahlen $(J^{PC}I^G)$ und Helizität $(M = \lambda = \lambda_a - \lambda_b)$ vorgegeben. Alle Zerfallsamplituden, die zum gleichen Endzustand führen[24], müssen kohärent summiert werden (Σ_k), unabhängig davon, über welche resonanten Zwischenzustände die Zerfallskette durchlaufen wird. Wenn mehrere Teilchen der gleichen Sorte ($\pi = \pi^+, \pi^-, \pi^0$ oder $K = K^+, K^-, K^0, \bar{K}^0$) im Endzustand vorhanden sind, dann müssen alle Kombinationen unter Berüchsichtigung aller in diesem Kapitel diskutierten Erhaltungssätze kohärent, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge addiert werden. Anders ausgedrückt bedeutet dies, daß für jeden einzelnen Zerfall innerhalb einer Kette aus den Zweiteilchenzuständen mit Gesamtspin J und Gesamtisospin I_J (4.54) gerade diejenigen „herausprojiziert“ werden, die in **allen** Quantenzahlen mit dem zerfallenden Zustand übereinstimmen und auch im Endzustand realisiert sind. Dieser Sachverhalt wird in Anhang B.2 noch einmal ausführlich an einem Beispiel diskutiert (siehe insbesondere Tab. B.1).

4.6.2 Behandlung der Anfangszustände

Sind die Primärteilchen der Reaktion a und b nicht polarisiert, dann können alle in Kapitel 4.3 diskutierten Anfangszustände mit allen erlaubten Helizitäten produziert werden. Partialwellen von Anfangszuständen mit unterschiedlichen Spin $S_{a,b}$ können nicht miteinander interferieren, daher müssen Singulett– und Triplett–Partialwellen inkohärent addiert werden. Aber auch Partialwellen derselben Multiplizität μ, aber mit unterschiedlichen Helizitäten $M_\mu = \lambda_a - \lambda_b$, sind inkohärent und werden entsprechend summiert. Im Falle der Antiproton-Proton Annihilation ergeben sich daher vier inkohärente Terme, es sei denn eine bestimmte Helizität trägt nicht bei, oder keiner der Anfangszustände einer Multiplizität trägt bei. Der Wirkungsquerschnitt ist proportional zur Gewichtsfunktion w, die für Fermion–Antifermion Annihilationen die folgende Form hat

$$\begin{aligned} w &= 2\,|\text{Singulett}, M=0|^2 \\ &+ 2\,|\text{Triplett}, M=0|^2 + |\text{Triplett}, M=1|^2 + |\text{Triplett}, M=-1|^2 \end{aligned} \tag{4.124}$$

[24] Da mit *TARA* keine verschiedenen Endzustände, z.B. $\pi^0\pi^0\pi^0$ und $\pi^0\pi^0\eta$, in einer gekoppelten Analyse gleichzeitig angepaßt werden können, ist dies hier immer der Fall.

Der Faktor Zwei für Terme mit $M = 0$ ist eine Folge der Spin-Statistik, da es für die Helizität $M = 0$ zwei Möglichkeiten gibt. In diesem Fall haben beide Primärteilchen der Reaktion Helizität $1/2$, oder die Teilchen a und b besitzen beide die Helizität $-1/2$. Das Analyseprogramm *TARA* setzt vorraus, daß die Zustände statistisch verteilt sind, das heißt das die Spin-Faktoren tatsächlich Zwei und Eins sind[25].

4.7 Gewichtsfunktion (Wirkungsquerschnitt)

Unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse kann die Gewichtsfunktion für ein Ereignis wie folgt geschrieben werden

$$\begin{aligned} w \; = \; & \sum_{\mu} \sum_{M_\mu} \Bigg| \sum_{J_\mu} \tilde{\Pi}^{J_\mu}_{M_\mu} \sum_k F(C_k(G_k)) \;\; C^k_{I^k_{J_\mu}, I^k_{3_{J_\mu}}} \\ & \sum_{\lambda_{s^k}, \lambda_{t^k}} \tilde{\alpha}^{J_\mu}_{\lambda_{s^k}, \lambda_{t^k}} {D^{J_\mu}_{M_\mu, \lambda_{s^k} - \lambda_{t^k}}}^* \left(\Omega^{s^k}_{J_\mu} \right) \\ & \left(\sum_{\lambda_{s^k_1}, \lambda_{s^k_2}} \alpha^{s^k}_{\lambda_{s^k_1}, \lambda_{s^k_2}} {D^{s^k}_{\lambda^k_s, \lambda_{s^k_1} - \lambda_{s^k_2}}}^* \left(\Omega^{s^k_1}_{s^k} \right) \times (\cdots) \right) \\ & \left(\sum_{\lambda_{t^k_1}, \lambda_{t^k_2}} \alpha^{t^k}_{\lambda_{t^k_1}, \lambda_{t^k_2}} {D^{t^k}_{\lambda^k_t, \lambda_{t^k_1} - \lambda_{t^k_2}}}^* \left(\Omega^{t^k_1}_{t^k} \right) \times (\cdots) \right) \Bigg|^2 \end{aligned} \tag{4.125}$$

Terme zu unterschiedlichen Spin-Multiplizitäten μ und unterschiedlichen Helizitäten M_μ der Primärteilchen der Reaktion werden inkohärent addiert. Die kohärenten Summen beziehen alle erlaubten Gesamtdrehimpulse J_μ ein, die zur Multiplizität μ und zur Helizität M_μ beitragen. Jeder Summand der Summe über J_μ beginnt mit einer Produktionsamplitude $\tilde{\Pi}^{J_\mu}_{M_\mu}$. Die Produktionsamplituden sind freie, komplexe Parameter. Jede Zerfallskette, über die der produzierte Anfangszustand J_μ in den Endzustand zerfallen kann, wird kohärent, unter Berücksichtigung aller kombinatorischen Fälle (Σ_k), addiert. Wie in Kapitel 4.5 erläutert, erhält jede Kette einen konstanten reellen Faktor $C^k_{I^k_J, I^k_{3_J}}$, der ein Produkt aus Isospin–Clebsch–Gordan–Koeffizienten ist, und gegebenenfalls zusätzliche Faktoren $F\,(C_k, G_k)$. Schließlich werden alle partiellen Zerfallsamplituden wie in (4.123) summiert. Die Energie– beziehungsweise die Massenabhängigkeit der partiellen Zerfallsamplituden α für die Resonanzen (s, t, s_1, s_2, $\cdots$) wird durch geeignete Funktionen Δ, wie sie in Kapitel 4.4 motiviert wurden, parametrisiert: $\alpha = \tilde{\alpha}\Delta$. Beispiele für Δ sind in Anhang C.10 angegeben. Die komplexen Zahlen $\tilde{\Pi}$ und $\tilde{\alpha}$ und die Nominalwerte für Massen und Breiten der Resonanzen gehen als zu bestimmende Parameter in eine Partialwellenanalyse ein.

4.7.0.1 Beispiel – $\bar{p}\,(600\,\mathrm{MeV}/c)\,p \to \pi^0\pi^0\pi^0$

Alle in dieser Arbeit vorgestellten Endzustände ($\pi^0\pi^0\pi^0$, $\eta\eta\pi^0$ und $K^+K^-\pi^0$) sind Endzustände mit drei pseudoskalaren Mesonen ($J^P = 0^-$). Das Teilchen s sei eine der Resonanzen, die in jeweils zwei der Endzustandsteilchen zerfällt. Dann sind sowohl das Teilchen t als auch die Zerfallsprodukte der Resonanz s (s^k_1 und s^k_2) pseudoskalare, (quasi–) stabile

[25] Wenn zum Beispiel die Primärteilchen der Reaktion aus irgendeinem experimentellen Grunde doch zum Teil polarisiert sind, dann trift diese Annahme nicht mehr zu.

Mesonen, die nur Helizität Null besitzen können ($\lambda_t^k = \lambda_{s_1^k} = \lambda_{s_2^k} = 0$). Für alle drei Endzustände kann daher Gleichung (4.125) zu

$$\begin{aligned} w \;=\; & \sum_{\mu} \sum_{M_\mu} \Bigg| \sum_{J_\mu} \tilde{\Pi}^{J_\mu}_{M_\mu} \sum_k F(C_k(G_k)) \;\; C^k_{I^k_{J_\mu}, I^k_{3_{J_\mu}}} \\ & \sum_{\lambda_{s^k}} \tilde{\alpha}^{J_\mu}_{\lambda_{s^k},0} \;\; \tilde{\alpha}^{s^k}_{0,0} \; \Delta_{L^k=s^k} \;\; D^{J_\mu\,*}_{M_\mu,\lambda_{s^k}} \left(\Omega^{s^k}_{J_\mu}\right) D^{s^k\,*}_{\lambda^k_s,0} \left(\Omega^{s^k_1}_{s^k}\right) \Bigg|^2 \end{aligned} \tag{4.126}$$

vereinfacht werden. Die Dynamik des Zerfalls der Resonanz s wird hier durch eine Drehimpuls–abhängige Funktion Δ_L beschrieben. Der Drehimpuls L ist für den Zerfall in zwei Spin–0–Teilchen der Spin der Resonanz s. Als spezielles Beispiel für eine Gewichtsfunktion sei nun die in dieser Arbeit vorgestellte Reaktion $\bar{p}\,(600\,\mathrm{MeV/c})\, p \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$ betrachtet. Der maximal beitragende Drehimpuls $J_{\max}$ sei Zwei, und es mögen drei Resonanzen zur Reaktion beitragen: $f_2(1270)$, $f_0(1500)$ und $f_2(1640)$. Nach den in diesem Kapitel diskutierten Erhaltungssätzen sind folgende Anfangszuände (vgl. Tab.4.2) erlaubt: die Singulett–Zustände $^1S_0$ ($\mu = 0$, $M_\mu = 0$) und $^1D_2$ ($\mu = 0$, $M_\mu = 0$) sowie die Triplett–Zustände $^3P_1$ ($\mu = 1$, $M_\mu = 1, -1$) und ($^3P_2, {}^3F_2$) ($\mu = 1$, $M_\mu = 0, 1, -1$). Jeder der Anfangszustände kann über die drei intermediären Resonanzen in den $\pi^0\pi^0\pi^0$–Endzustand zerfallen, mit Ausnahme des Anfangszustandes ($^3P_2, {}^3F_2$), der aus Gründen der Paritätserhaltung nicht in $f_0 + \pi^0$ zerfallen kann. Also erstreckt sich für jede Produktionsamplitude ($\tilde{\Pi}$) die kohärente Summe über die Zerfallskanäle (Σ_k) über alle drei Kanäle, mit Ausnahme der beiden Produktionamplituden für den ($^3P_2, {}^3F_2$)–Anfangszustand. Die Summe enthält die drei kombinatorischen Fälle $((\pi^0_1\pi^0_2) + \pi^0_3)$, $((\pi^0_1\pi^0_3) + \pi^0_2)$ und $((\pi^0_2\pi^0_3) + \pi^0_1)$. Da der $\pi^0\pi^0\pi^0$–Endzustand definierten Isospin ($I = 1$) hat, trägt nur die Isospin–1–Komponente der Anfangszustände zur Reaktion bei. Da es sich zudem um drei identische Pionen handelt und alle drei Resonanzen den gleichen Isospin haben ($I_s = 0$), sind alle Produkte aus Isospin–Clebsch–Gordan–Koeffizienten gleich ($C^k_{I^k_{J_\mu}, I^k_{3_{J_\mu}}} = -\sqrt{1/3}$). Es wird kein C– oder G–Paritäts–abhängiger Faktor benötigt ($F(C_k(G_k)) = 1$), da die Reaktion keine Teilchen mit äußeren schweren Flavor (Strangeness) beinhaltet. Die komplexen Zahlen (Parameter) $\tilde{\alpha}^{s^k}_{0,0}$ können zu Eins gewählt werden (siehe Kapitel 4.7.2). Mithin lautet die Gewichtsfunktion für den $\pi^0\pi^0\pi^0$–Endzustand

$$w \;=\; \sum_{\mu} \sum_{M_\mu} \Bigg| \sum_{J_\mu} \tilde{\Pi}^{J_\mu}_{M_\mu} \sum_k \sum_{\lambda_{s^k}} \tilde{\alpha}^{J_\mu}_{\lambda_{s^k},0} \;\; \left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) \Delta_{L^k=s^k} \; D^{J_\mu\,*}_{M_\mu,\lambda_{s^k}} \left(\Omega^{s^k}_{J_\mu}\right) D^{s^k\,*}_{\lambda^k_s,0} \left(\Omega^{s^k_1}_{s^k}\right) \Bigg|^2$$

4.7.1 Unabhängige Observable

Mit unabhängigen Observablen werden die unabhängigen Größen bezeichnet, die den gesamten Phasenraum der Reaktion aufspannen. Über die unabhängigen Observablen kann Gleichung (4.125) nicht trivial integriert werden. Die Anzahl der unabhängigen Observablen läßt sich direkt aus (4.125) ablesen. Für jeden Zweikörperzerfall treten zwei beobachtbare Winkel ($\Omega^\sigma_\iota = (\Theta^\sigma_\iota, \phi^\sigma_\iota)$) auf. Das dritte Argument ($\psi^\sigma_\iota = 0$) der D-Funktionen ist durch die ursprüngliche Flugrichtung (der z_σ-Achse) des zerfallenden Zustandes (σ) festgelegt. Eine Ausnahme ist der Zerfall des Anfangszustandes. Von den Winkeln $\Theta^{s^k}_{J_\mu}$ und $\phi^{s^k}_{J_\mu}$ birgt nur der Winkel $\Theta^{s^k}_{J_\mu}$ Information, es sei denn die Primärteilchen der Reaktion sind polarisiert. Nur in diesem Fall sind die Ereignisse in Bezug auf $\phi^{s^k}_{J_\mu}$ nicht isotrop verteilt. Folglich darf die Gewichtsfunktion auch nicht von $\phi^{s^k}_{J_\mu}$ abhängen. Dies ist der Fall, denn der Term $\exp(-\imath M_\mu \phi^{s_k}_{J_\mu})$ ist für alle D–Funktionen in der Summe über J_μ der gleiche und kann daher faktorisiert werden. Durch das Betragsquadrat fällt die $\phi^{s_k}_{J_\mu}$–Abhängigkeit schließlich heraus. Die Anzahl der unabhängigen Observablen n_O für einen Endzustand mit n_T Teilchen ist daher höchstens $2(n_T-1)-1$, wenn die Reaktion im Fluge, also aus einem Streuzustand heraus, stattfindet. Durch die Flugrichtung der Primärteilchen der Reaktion ist eine Richtung (z.B. die z-Achse im Laborsystem) fest vorgegeben, bezüglich der der Winkel $\Theta^{s_k}_{J_\mu}$ gemessen wird. Bei der $\bar{p}p$-Annihilation in Ruhe ist dies nicht der Fall, denn das Antiproton und das Proton bilden zunächst ein Wasserstoffatom–ähnliches System, das mit beliebiger Orientierung zur gewählten z-Achse zerfallen kann. Also gibt es bei der $\bar{p}p$-Annihilation in Ruhe höchstens $2(n_T-2)$ unabhängige Observable[26]. Zwei weitere wichtige Aspekte sind zu beachten:

- Die Einbeziehung der Zerfälle der quasistabilen, pseudoskalaren Mesonen (π^0, η, η') in zwei Photonen birgt keine zusätzliche Information, da die Zerfallswinkelabhängigkeit durch die D–Funktion $D^{0^*}_{00} \equiv 1$ herausfällt. Jede Abweichung von einer Gleichverteilung dieser Zerfallswinkel wird lediglich durch die Detektor–Akzeptanz, durch Reflexionen oder durch die Winkelverteilung vorhergehender Zerfälle hervorgerufen. Nur wenn der Spin des quasistabilen Teilchens mindestens Eins ist, also zum Beispiel für das ω-Meson ($\omega \to \pi^0\gamma$), ist es sinnvoll den Zerfall des quasistabilen Mesons mit in die Gewichtsfunktion einzubeziehen.

- Für Endzustände mit zwei pseudoskalaren Mesonen ($\pi\pi$, $K\bar{K}$, $\pi\eta$, $\cdots$) ist die Gewichtsfunktion aus (4.125) ungeeignet, da die einzige unabhängige Observable $\Theta^{s_k}_{J_\mu}$ ist. In diesem Fall sind die freien Parameter der Anpassung nicht mehr unabhängig voneinander, da die Betragsquadrate der d–Funktionen $d^{J_\mu}_{M_\mu,0}$ im allgemeinen linear abhängig sind. Aus diesem Grund führt eine Entwicklung nach den Anfangszuständen wie in (4.125) zu Uneindeutigkeiten, da zuviele freie Parameter berücksichtigt werden. In diesem Fall kann die Gewichtsfunktion lediglich in eine Summe von Legendre–Polynomen (siehe Anhang C.1.1) entwickelt werden

$$w = \sum_{l}^{l_{\max}} a_l P_l\left(\cos(\Theta)\right) \quad , \tag{4.127}$$

  wobei die Koeffizienten a_l als freie Parameter in die Anpassung eingehen. Nur wenn experimentell sichergestellt ist, daß ganz bestimmte Anfangszustände nicht beitragen

[26]Für einen Dreikörper-Endzustand der Annhilation in Ruhe gibt es demnach zwei unabhängige Observable. Dies läßt sich auch wie folgt verstehen: Die drei gemessenen Vierervektoren besitzen zwölf Komponenten. Von diesen Observablen müssen vier wegen der Energie– und Impulserhaltung, drei wegen der fest vorgegebenen invarianten Massen der Endzustands–Teilchen und drei Eulerwinkel für die Orientierung des $\bar{p}p$-Atoms im Raum, über die integriert werden kann, abgezogen werden. Als verbleibende unabhängige Observablen werden häufig die invarianten Massen zum Quadrat m^2_{12} und m^2_{23} gewählt. Werden diese beide Größen gegeneinander aufgetragen, dann ergibt sich ein Dalitzplot, in dem für $\bar{p}p$-Annihilationen in Ruhe, ohne intermediäre Resonanzen, unabhängig von den Quantenzahlen der Anfangszustände, die Ereignisse gleichverteilt sind. Resonanzen führen zu Bändern im Dalitzplot. Die Häufigkeitsverteilung innerhalb eines Bandes ist für die $\bar{p}p$-Annihilationen in Ruhe die Zerfallswinkelverteilung der Resonanz (bis auf Reflexionen anderer Resonanzen, bei sich kreuzenden Bändern). Bei der $\bar{p}p$–Annihilationen im Fluge hingegen ist die Häufigkeitsverteilung der Ereignisse im Dalitzplot ohne intermediäre Resonanzen nur dann gleichverteilt, wenn ausschließlich Anfangszustände mit Gesamtdrehimpuls Null beitragen. Im Allgemeinen ist daher die Häufigkeitsverteilung innnerhalb eines durch eine Resonanz hervorgerufenen Bandes bei der $\bar{p}p$–Annihilationen im Fluge durch eine Faltung des Zerfallswinkels des $\bar{p}p$–Systems (sogenannter Produktionswinkel) und des Zerfallswinkels der Resonanz gegeben.

können, dann gibt es Fälle, in denen (4.125) eindeutig ist. Dies ist in der experimentellen Praxis kaum zu realisieren, da die beitragenden Anfangszustände nur schwer kontrollierbar sind.

4.7.2 Anzahl der zu bestimmenden Parameter

Aus den im vorherigen Abschnitt angegebenen Gründen ist es nicht möglich einen allgemeingültigen, geschlossenen Ausdruck für die Anzahl der zu bestimmenden, freien Parameter einer Anpassung anzugeben. Die Anzahl der freien Parameter der in dieser Arbeit vorgestellten Partialwellenanalysen kann mit Tab.4.2 bestimmt werden. Die Tabelle ist gültig für alle Endzustände, Resonanzen und Hypothesen, bei denen immer mindestens eines der Zerfallsprodukte des Anfangszustandes ein Teilchen mit der Spin–Parität 0^- ist. Dies ist für alle in dieser Arbeit vorgestellten Analysen der Fall, denn die gegen die Resonanzen in den Zerfällen der $\bar{p}p$-Anfangszustände rückstreuenden Teilchen sind entweder ein Pionen, Kaonen oder Eta–Mesonen. Die Gesamtanzahl der freien reelen Parameter kann man damit wie folgt bestimmen:

1. Reelle Parameter für Resonanzen:

   (a) $+2n_R$
   Wenn für die Zerfallsdynamik der Resonanzen eine der Breit–Wigner–Formen aus Anhang C.10 verwendet werden, dann wird für jede Resonanz jeweils ein freier Parameter für die Sollmasse und ein freier Parameter für die Sollbreite benötigt.

   (b) $+2\sum_R (n_{\alpha_R} - 1)$
   Ist die Anzahl der partiellen Zerfallsamplituden einer Resoanz n_{α_R}, dann kommen nur $n_{\alpha_R} - 1$ komplexe Parameter hinzu, da ein komplexer Parameter faktorisiert werden kann. Dieser komplexe Parameter kann mit den partiellen Zerfallsamplituden vorhergehender Zerfälle, beziehungsweise mit den Produktionsamplituden, zusammengefaßt werden. Also werden für jede Resonanz weitere $2n_{\alpha_R} - 2$ freie Parameter benötigt.

2. Reelle Parameter für Anfangszustände:

   (a) $+2\sum_A n_{\alpha_A}$
   Für jeden Zerfallskanal der Anfangszustände wird aus Tabelle 4.2 die Gesamtanzahl aller partiellen Zerfallsamplituden n_{α_A} der Anfangszustände bis zum maximal beitragenden Gesamtspin des $\bar{p}p$-Systems (Doppellinie) entnommen (fettgedruckte Zahlen) und aufaddiert.

   (b) $+2n_\Pi$
   Die Gesamtanzahl n_Π der komplexen, partiellen Produktionsamplituden bis zum maximal beitragenden Gesamtspin des $\bar{p}p$-Systems wird anlog zu den partiellen Zerfallsamplituden aus der Spalte $\Pi_{\lambda_{\bar{p}p}}$ von Tab.4.2 entnommen. Es kommen weitere $2n_\Pi$ Parameter hinzu.

   (c) $-2\sum_A n_\pi$
   Für jeden verbotenen Anfangszustand, der in **keinen** der Kanäle zerfallen kann, sei es wegen der Spin-Paritätserhaltung oder durch eine zusätzliche Annahme, wird die Anzahl der partiellen Produktionsamplituden für den jeweiligen Anfangszustand (n_π) aus Tab.4.2 (kleine Zahlen in Spalte $\Pi_{\lambda_{\bar{p}p}}$) entnommen. Diese $2n_\pi$ reellen Parameter werden nicht benötigt.

$\bar{p}p$-Anfangszustand $^{\mu}L_J$, J^{PC} (I^G)	$\Pi_{\lambda_{\bar{p}p}}$	Resonanzen K^*	K_0^*	K_2^*	a_0/f_0	a_2/f_2	ρ/ϕ	ρ_3/ϕ_3
$^1S_0$ 0^{-+} $(0^+,1^-)$	Π_0 1 **1**	α_{00} 1 **1**	α_{00} 1 **1**	α_{00} 1 **1**	α_{00} 1 **1**	α_{00} 1 **1**	- 0 **0**	- 0 **0**
$^1P_1$ 1^{+-} $(0^-,1^+)$	Π_0 1 **2**	α_{00},α_{10} 2 **3**	α_{00} 1 **2**	α_{00},α_{10} 2 **3**	- 0 **1**	- 0 **1**	α_{00},α_{10} 2 **2**	α_{00},α_{10} 2 **2**
$^3P_1$ 1^{++} $(0^+,1^-)$	$\Pi_\pm$ 1 **3**	α_{00},α_{10} 2 **5**	α_{00} 1 **3**	α_{00},α_{10} 2 **5**	α_{00} 1 **2**	α_{00},α_{10} 2 **3**	- 0 **2**	- 0 **2**
$^3S_1,{}^3D_1$ 1^{--} $(0^-,1^+)$	$\Pi_{\pm,0}$ 2 **5**	α_{10} 1 **6**	- 0 **3**	α_{10} 1 **6**	- 0 **2**	- 0 **3**	α_{10} 1 **3**	α_{10} 1 **3**
$^1D_2$ 2^{-+} $(0^+,1^-)$	Π_0 1 **6**	α_{00},α_{10} 2 **8**	α_{00} 1 **4**	α_{00},α_{10} α_{20} 3 **9**	α_{00} 1 **3**	α_{00},α_{10} α_{20} 3 **6**	- 0 **3**	- 0 **3**
$^3D_2$ 2^{--} $(0^-,1^+)$	$\Pi_\pm$ 1 **7**	α_{00},α_{10} 2 **10**	α_{00} 1 **5**	α_{00},α_{10} α_{20} 3 **12**	- 0 **3**	- 0 **6**	α_{00},α_{10} 2 **5**	α_{00},α_{10} α_{20} 3 **6**
$^3P_2,{}^3F_2$ 2^{++} $(0^+,1^-)$	$\Pi_{\pm,0}$ 2 **9**	α_{10} 1 **11**	- 0 **5**	α_{10},α_{20} 2 **14**	- 0 **3**	α_{10},α_{20} 2 **8**	- 0 **5**	- 0 **6**
$^1F_3$ 3^{+-} $(0^-,1^+)$	Π_0 1 **10**	α_{00},α_{10} 2 **13**	α_{00} 1 **6**	α_{00},α_{10} α_{20} 3 **17**	- 0 **3**	- 0 **8**	α_{00},α_{10} 2 **7**	α_{00},α_{10} α_{20},α_{30} 4 **10**
$^3F_3$ 3^{++} $(0^+,1^-)$	$\Pi_\pm$ 1 **11**	α_{00},α_{10} 2 **15**	α_{00} 1 **7**	$\alpha_{00},\alpha_{10},$ α_{20} 3 **20**	α_{00} 1 **4**	$\alpha_{00},\alpha_{10},$ α_{20} 3 **11**	- 0 **7**	- 0 **10**
$^3D_3,{}^3G_3$ 3^{--} $(0^-,1^+)$	$\Pi_{\pm,0}$ 2 **13**	α_{10} 1 **16**	- 0 **7**	α_{10},α_{20} 2 **22**	- 0 **4**	- 0 **11**	α_{10} 1 **8**	α_{10},α_{20} α_{30} 3 **13**
$^1G_4$ 4^{-+} $(0^+,1^-)$	Π_0 1 **14**	α_{00},α_{10} 2 **18**	α_{00} 1 **8**	α_{00},α_{10} α_{20} 3 **25**	α_{00} 1 **5**	α_{00},α_{10} α_{20} 3 **14**	- 0 **8**	- 0 **13**
$^3G_4$ 4^{--} $(0^-,1^+)$	$\Pi_\pm$ 1 **14**	α_{00},α_{10} 2 **20**	α_{00} 1 **9**	α_{00},α_{10} α_{20} 3 **28**	- 0 **5**	- 0 **14**	α_{00},α_{10} 2 **10**	α_{00},α_{10} α_{20},α_{30} 4 **17**
$^3F_4,{}^3H_4$ 4^{++} $(0^+,1^-)$	$\Pi_{\pm,0}$ 2 **18**	α_{10} 1 **21**	- 0 **9**	α_{10},α_{20} 2 **30**	- 0 **5**	α_{10},α_{20} 2 **16**	- 0 **10**	- 0 **17**

Tabelle 4.2: **Anzahl der komplexen Parameter $\bar{p}p \to X + 0^-$**
Mit Hilfe der Tabelle läßt sich die Anzahl der freien Parameter zu einer Hypothese bestimmen (siehe Text). Die linke Spalte gibt den $\bar{p}p$-Anfangszustand in spektroskopischer Notation und in den Quantenzahlen $J^{PC}I^G$ an. Zu jeder Resonanz sind die möglichen partiellen $\bar{p}p$-Zerfallsamplituden (α), unter den Vorraussetzungen, daß das rückstreuende Teilchen die Spin–Parität 0^- hat (z.B. ein Pion) und sowohl in der Produktion (Π) als auch in dem Zerfall die Parität erhalten ist, angegeben. Die kleinen Zahlen geben die Anzahl der komplexen Parameter für die jeweilige Produktion beziehungsweise den Zerfall an. Die großen Zahlen sind die Summe aller Parameter, wenn alle Anfangszustände bis zur jeweiligen Zeile berücksichtigt werden.

(d) $-\sum_A 1 (_{\text{oder}}\ 2)$
Für jeden erlaubten Anfangszustand kann eine Phase der partiellen Zerfallsamplitude(n) fixiert werden. Zerfällt ein Anfangszustand nur in **genau einen** Kanal, dann kann eine partielle Zerfallsamplitude des Anfangszustandes, wie im Falle der Resonanzen, faktorisiert werden. Dieser komplexe Parameter wird in den Produktionsamplituden absorbiert. In diesem Fall werden zwei Parameter weniger benötigt.

(e) $-2n_{|M_\mu|}$
Unter der Annahme statistisch verteilter Anfangszustände sind die Beiträge nicht miteinander interferierender Gruppen von Anfangszuständen durch (4.124) vorgegeben. Die Spin-Statistik-Faktoren können in den Produktionsamplituden absorbiert werden und tauchen daher in (4.125) nicht mehr auf. In jedem Absolutquadrat von (4.125) kann daher eine komplexe Produktionsamplitude zur Normierung fixiert werden. Da Paritätserhaltung für die Produktion der Anfangszustände gefordert wird, sind die Produktionsamplituden Π_{M_μ} und Π_{-M_μ} nicht unabhängig voneinander. Aus diesem Grund kann für jede Multiplizität und für jeden unterschiedlichen Betrag der Helizität $|M_\mu|$ der Anfangszustände eine Produktionsamplitude fixiert werden. Gibt es $n_{|M_\mu|}$ unterschiedliche Absolutquadrate dieser Art, dann können $2n_{|M_\mu|}$ Parameter fixiert werden. Für den $\bar{p}p$–Anfangszustand sind das maximal sechs reelle Parameter.

4.7.2.1 Beispiel – $\bar{p}\,(600\,\mathbf{MeV/}c)\,p \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$

Die obigen Regeln werden nun auf die Analyse der Reaktion $\bar{p}\,(600\,\mathrm{MeV}/c)\,p \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$ angewandt. Die zu testende Hypothese sei diejenige, die als Beispiel der Gewichtsfunktion in Kapitel 4.7.0.1 ausgewählt wurde, das heißt der maximal beitragende Drehimpuls $J_{\max}$ sei Zwei, und die drei Resonanzen $f_2(1270)$, $f_0(1500)$ und $f_2(1640)$ mögen zum Endzustand beitragen. Die Anzahl der freien Parameter der Anpassung kann mit den obigen Regeln wie folgt bestimmt werden:

1. Parameter für Resonanzen:

   (a) $+6 = 2n_R = 2 \times 3$
   Parameter für Massen und Breiten: $m_{f_2(1270)}$, $m_{f_0(1500)}$, $m_{f_2(1640)}$, $\Gamma_{f_2(1270)}$, $\Gamma_{f_0(1500)}$ und $\Gamma_{f_2(1640)}$.

   (b) $+0 = 2\sum_R (n_{\alpha_R} - 1) = 2 \times 3 \times 0$
   Zu jeder der drei Resonanzen gehört nur eine partielle Zerfallsamplitude ($\alpha_{0,0}$), da die Zerfallsprodukte Spin Null besitzen. Diese partiellen Zerfallsamplituden können mit den Zerfallsamplituden der Anfangszustände zu diesen Resonanzen zusammengefaßt werden (siehe Gl. 4.127 und Gl. 4.126 für die Gewichtsfunktion).

2. Parameter für Anfangszustände:

   (a) $+38 = 2\sum_A n_{\alpha_A} = 2 \times (3 + 8 + 8)$
   Der maximale beitragende Gesamtdrehimpuls $J_{\max}$ ist Zwei. Die Anzahl der partiellen Zerfallsamplituden für den Zerfall der Anfangszustände bis Spin–2 wird aus der Zeile 2^{++} (oberhalb der Doppellinie) in Tab.4.2 entnommen. Für den Zerfall in ein f_2–Meson und ein Pion gibt es acht partielle Amplituden und für den Zerfall in ein f_0–Meson und ein Pion lediglich drei.

(b) $+18 = 2n_{\Pi} = 2 \times 9$
Aus derselben Zeile wird die Anzahl aller partiellen Produktionsamplituden entnommen.

(c) $-8 = -2\sum_A n_\pi = -2(1+2+1)$
Die Anfangszustände ${}^1P_1$, $({}^3S_1, {}^3D_1)$ und ${}^3D_2$ können in keinen der Kanäle (Resonanz und rückstreuendes Pion) zerfallen.

(d) $-4 = -\sum_A 1$
Vier Anfangszustände sind erlaubt. Jeder der Anfangszustände kann in mehr als nur einen Kanal zerfallen.

(e) $-6 = -2n_{|M_\mu|}$
Die Gewichtsfunktion besitzt (alle) vier Absolutquadrate, aber es können nur drei Produktionsamplituden fixiert werden, da die Fixierung von z.B. $\tilde{\Pi}_1^{{}^3D_2}$ wegen der Paritätserhaltung in der Produktion automatisch die Fixierung von $\tilde{\Pi}_{-1}^{{}^3D_2}$ bedeutet.

Also gibt es insgesamt $6+38+18-8-4-6 = 44$ freie Parameter in der Gewichtsfunktion zu dieser Hypothese.

4.8 Maximum–Likelihood–Methode

Zur Bestimmung der freien Parameter einer Anpassung wird die Maximum Likelihood Methode verwendet. Die Wahrscheinlichkeit P_d ein bestimmtes Ereignis zu beobachten, wird mit Hilfe der Gewichtsfunktion w definiert:

$$P_d = \frac{w(\tau_d, \tilde{x})}{\Xi} \tag{4.128}$$

Hierbei steht τ_d für alle Observablen die den Phasenraum aufspannen, $\tilde{x}$ repräsentiert alle freien Parameter und Ξ ist das Phasenraumintegral, auf das die Wahrscheinlichkeiten P_d normiert werden.

$$\Xi = \int w(\tau, \tilde{x})\epsilon(\tau) d\tau \tag{4.129}$$

Im Phasenraumintegral ist die Effizienz $\epsilon(\tau)$ berücksichtigt, ein Ereignis mit Phasenraumkoordinaten τ zu detektieren. Dieses Integral kann nur in Ausnahmefällen analytisch berechnet werden, daher wird es mit Hilfe von Monte Carlo simulierten Ereignissen numerisch approximiert.

$$\Xi \approx \frac{n_d}{n_m} \sum_{m=0}^{n_m} w(\tau_m, \tilde{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n_d}{n_m} \Phi \tag{4.130}$$

n_d ist die Anzahl der Datenereignisse. Je größer die Anzahl n_m der Monte Carlo Ereignisse um so besser ist die Approximation. Mit den Wahrscheinlichkeiten P_d kann nun eine *Likelihood* Funktion definiert werden.

$$\mathcal{L} = n_d! \prod_{d=1}^{n_d} \frac{w(\tau_d, \tilde{x})}{\Xi} e^{\frac{-n_d-\Xi}{2n_d}} \tag{4.131}$$

Der Faktor $n_d!$ wird benötigt, da es nicht auf die Reihenfolge der Ereignisse ankommt. Mit der Exponentialfunktion wird berücksichtigt, daß auch die Gesamtanzahl der gemessenen Ereignisse mit einem statistischen Fehler behaftet ist. Die Exponentialfunktion gibt der Anpassung mehr Freiheit und normiert das Phasenraumintegral absolut. Im Falle der Konvergenz einer Anpassung ergibt sich $\Phi = n_m$ und damit $\Xi = n_d$. Da das Produkt vieler Wahrscheinlichkeiten eine mit numerischen Methoden kaum von Null zu unterscheidende Zahl ist, wird anstelle der Maximierung von $\mathcal{L}$, eine Minimierung des negativen natürlichen Logarithmus der *Likelihood* Funktion (NLL[27]) vorgenommen. Unter Verwendung der Stirling'schen Näherungsformel und unter Vernachlässigung aller konstanten Terme, die nicht von Parametern abhängen[28], kann die zu minimierende Funktion[29] NLL wie folgt geschrieben werden

$$NLL = \sum_{d=1}^{n_d} \log\left(w(\tau_d, \tilde{x})\right) + \frac{n_d}{2}\left(\frac{\Phi}{n_m} - 1\right)^2 + n_d \log\left(\frac{\Phi}{2n_m}\right) \qquad (4.132)$$

Für eine χ^2-Anpassung muß der Phasenraum in Zellen eingeteilt werden. Die Anzahl der benötigten Zellen wächst exponentiell mit der Dimension des Phasenraumes, also mit der Anzahl der unabhängigen Observablen n_O. Wird jede Dimension in n_s Abschnitte unterteilt, und soll jede Zelle mindestens n_e Ereignisse enthalten, dann werden insgesamt mindestens

$$n_E = n_e n_s^{n_O} \qquad (4.133)$$

Datenereignisse benötigt. Für die Analyse eines Dreikörper–Endzustandes der Proton–Antiproton Annihilation im Fluge mit drei unabhängigen Observablen ($n_O = 3$) und einer sehr groben Auflösung[30] von nur $n_s = 10$ werden bereits 1000 Zellen benötigt. Die Anzahl der benötigten Datenereignisse für eine χ^2–Anpassung übersteigt damit schnell die Anzahl der tatsächlich gemessenen Ereignisse. Aus diesem Grund wurde für die in dieser Arbeit vorgestellten Analysen von einer χ^2–Anpassung abgesehen und diese auch noch nicht im Analyseprogramm *TARA* implementiert.

---

[27] *NLL: Negative Log Likelihood*

[28] Die Addition beliebiger konstanter Funktionen ist für die Minimierung bezüglich der freien Parameter unerheblich.

[29] Die Definition von NLL ist nicht eindeutig. Gleichung (4.132) ist die zur Zeit einzige in *TARA* implementierte Form.

[30] Eine der unabhängigen Observablen könnte zum Beispiel ein invariantes Massenquadrat sein; für den $\pi^0\eta\eta$–Endzustand zum Beispiel $m^2_{\pi^0\eta}$. Für die $\bar{p}p$-Annihilation bei 1940 MeV/c Strahlimpuls kann dieses Massenquadrat Werte zwischen ca. 0.5 GeV²/c⁴ und 3.5 GeV²/c⁴ annehmen. Mit einer Einteilung dieses Bereiches in nur zehn Abschnitte ist die Auflösung zu gering, um Masse und Breite der Resonanzen (z.B. $a_0(980)$ oder $a_2(1320)$) bestimmen zu können.

Kapitel 5

Analyse der Datensätze

In diesem Kapitel werden die Partialwellenanalysen der Endzustände $\pi^0\pi^0\pi^0$, $\eta\eta\pi^0$ und $K^+K^-\pi^0$ vorgestellt. Alle drei Endzustände sind mit demselben in Anhang A und Anhang B ausführlich beschriebenen Programm *TARA* analysiert worden. *TARA* ermöglicht es, ohne daß eine zusätzliche Programmierung notwendig ist, eine Vielzahl von Reaktionen zu untersuchen. Um die Tauglichkeit des Programms zu überprüfen, wurde der $\pi^0\pi^0\pi^0$–Endzustand erneut analysiert. Dieser Endzustand der $\bar{p}p$–Annihilation im Fluge war lange Zeit der einzige Dreikörper–Endzustand, der mit einer vollständigen Gewichtsfunktion unter Berücksichtigung von Produktions– und Zerfallsamplituden der Anfangszustände untersucht wurde [29]. Die Reaktion $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV/}c)\,p \to \eta\eta\pi^0$ ist bereits zweimal mit einem stark vereinfachten Ansatz analysiert worden [29, 38]. Die Ergebnisse der früheren Analysen werden in diesem Kapitel mit denjenigen verglichen, die mit einer vollständigen Beschreibung durch *TARA* erzielt wurden. Schließlich wird mit der Analyse der Reaktion $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV/}c)\,p \to K^+K^-\pi^0$ ein vollständig neues Ergebnis vorgestellt.

5.1 $\bar{p}\,(600\,\mathbf{MeV/}c)\,p \to \pi^0\pi^0\pi^0 \to 6\gamma$

Von den in Abbildung 3.9 dargestellten 39.655 Ereignissen sind für den Test des Partialwellenanalyseprogramms *TARA* nur dreitausend Ereignisse verwendet worden. Zudem wurden sechstausend Monte Carlo simulierte Ereignisse zur Berechnung des Phasenraumintegrals (4.129, 4.130) verwendet. Der älteren Analyse mit dem Programm *tps*[1] folgend, werden drei Resonanzen in die Analyse einbezogen: Das $f_2(1270)$–Meson, der *Glueball*–Kandidat $f_0(1500)$ und eine Tensor–Resonanz $f_2(1640)$. Der maximale beitragende Drehimpuls für die Anfangszustände des $\bar{p}p$–Systems J_{max} wurde zu Zwei gewählt. Die Gewichtsfunktion zu dieser Hypothese (4.127) diente bereits als Beispiel (Kapitel 4.7.0.1) für die allgemeine Gewichtsfunktion in Gleichung (4.125). Die zu minimierende *NLL*–Funktion (4.132) hat, wie bereits in Kapitel 4.7.2.1 ausführlich erläutert, 44 freie Parameter. Die Startwerte aller partiellen Produktions– und Zerfallsamplituden wurden zu Eins gewählt. Als Startwerte für die Sollmassen und die Sollbreiten[2] der drei Resonanzen dienten die Ergebnisse der früheren Analyse [29]. Die Minimierung der *NLL*–Funktion wurde in neun Schritten vorgenommen, die in Tabelle A.16 von Anhang A.1.3 gezeigt sind. *TARA* benötigte ca. neunzig

[1] *tps: three pseudoscalars*
tps kann beliebige Dreikörper-Endzustände mit drei neutralen pseudoskalaren Mesonen ($J^{PC} = 0^{-+}$) anpassen, wobei die Spins der Anfangszustände kleiner als sieben und die Spins der Resonanzen kleiner als drei sein müssen.

[2] Startwerte für Massen und Breiten der Resonanzen können genauso gut aus dem invarianten Massenspektrum 5.2 abgeschätzt werden.

Resonanz	Analyse mit *TARA* Masse $m \pm \sigma_{m_{\rm stat}}$ [MeV/c^2]	Breite $\Gamma \pm \sigma_{\Gamma_{\rm stat}}$ [MeV/c^2]	Beitrag %	Frühere Analyse Masse $m \pm \sigma_{m_{\rm stat}}$ [MeV/c^2]	Breite $\Gamma \pm \sigma_{\Gamma_{\rm stat}}$ [MeV/c^2]	Beitrag %
$f_2(1270)$	1274 ± 12	179 ± 21	52,6	1260 ± 2	179 ± 4	60,8
$f_0(1500)$	1525 ± 9	92 ± 12	32,5	1534 ± 4	131 ± 4	24,6
$f_2(1640)$	1652 ± 21	228 ± 30	14,9	1640 ± 2	169 ± 8	14,6

Tabelle 5.1: **Massen und Breiten** – $\bar{p}\,(600\,\textbf{MeV/}c)\,p \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$**.**
Die statistischen Fehler bei der Analyse mit TARA wurden mit dem Faktor Drei skaliert, da diese lediglich aus einer parabolischen Näherung der NLL–Funktion in der Nähe des Minimums bestimmt wurden.

Minuten *CPU*–Zeit[3] auf einem *IBM–RS–6000/590* Computer, der eine Rechenleistung von 5 spec–fp–95 erbringt. Die Ergebnisse der Anpassung für Massen und Breiten sind in Tabelle 5.1 den Ergebnissen der früheren Analyse gegenübergestellt. In Anbetracht der Tatsache, daß für die frühere Analyse etwa viermal mehr Ereignisse verwendet wurden, ist die Übereinstimmung gut. Lediglich die Breiten des $f_0(1500)$ und des $f_2(1640)$ weichen voneinander ab. Die relativen Anteile der Anfangszustände und jeder einzelnen partiellen Zerfallsamplitude sind in Tabelle 5.2 zusammengefaßt. Das für die frühere Analyse entwickelte Analyseprogramm *tps* benutzt genau wie *TARA* den Helizitätsformalismus. Die von *TARA* generierte Gewichtsfunktion ist gleich derjenigen von *tps*. Der einzige Unterschied besteht darin, daß in *tps* die partiellen Zerfallsamplituden der $\bar{p}p$–Anfangszustände $\alpha^J_{\lambda_s,\lambda_t}$ nach A^J_{LS} entwickelt sind[4]. Diese Umkopplung ist überflüssig, da für die Zerfälle der $\bar{p}p$–Anfangszustände (genau wie in *TARA* implementiert) keine Zerfallsdynamik benutzt wird. Aus diesem Grund sind in [29] die Beiträge der partiellen Zerfallsamplituden der

[3] *CPU*: *Central Processing Unit*. Die tatsächlich benötigte Zeit hängt von der Auslastung des Computers ab.

[4] Diese Entwicklungen sind allerdings fest einprogrammiert.

Anfangszustand	$f_2(1270)$ $\lambda_{f_2(1270)}$ 0	± 1	± 2	$f_0(1500)$ $\lambda_{f_0(1500)}$ 0	$f_2(1640)$ $\lambda_{f_2(1640)}$ 0	± 1	± 2	Σ
$\bar{p}p\ (^1S_0)$	12,6			20,2	0,7			33,5 (26,1)
$\bar{p}p\ (^1D_2)$	4,3	0,1	9,5	2,4	1,2	1,1	1,1	19,8 (30,4)
$\bar{p}p\ (^3P_1)$	3,3	19,9	–	9,9	2,0	6,5	–	41,6 (7,4)
$\bar{p}p\ (^3P_2, {}^3F_2)$	–	$< 0{,}1$	2,8	–	–	1,6	0,8	5,2 (36,1)
Σ	52,6 (60,8)			32,5 (24,6)	14,9 (14,6)			

Tabelle 5.2: **Beiträge der partiellen Zerfallsamplituden der** $\bar{p}p$**–Anfangszustände** – $\bar{p}\,(600\,\textbf{MeV/}c)\,p \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$ **.**
Die Tabelle gibt die Beiträge (in %) der insgesamt 19 *für* $J_{max} = 2$ *erlaubten partiellen Zerfallsamplituden* $\left(\alpha^{\bar{p}p}_{\lambda_f,\lambda_{\pi^0}} = \alpha^{\bar{p}p}_{\lambda_f,0}\right)$ *des* $\bar{p}p$*–Systems an. Der letzten Zeile bzw. der letzten Spalte können die Summen aller Beiträge der einzelnen Anfangszustände bzw. Resonanzen entnommen werden. Die in Klammern angegebenen Beiträge wurden in der früheren Analyse ermittelt.*

Anfangszustände nach LS–Kombinationen aufgeschlüsselt.
Daher können nur die Gesamtanteile der Anfangszustände direkt miteinander verglichen werden. Hier steht der Test mit *TARA* im Widerspruch zur älteren Analyse, da die Beiträge der Anfangszustände $^3P_1$ und $(^3P_2, {}^3F_2)$ miteinander vertauscht zu sein scheinen. Im Gegensatz zu einem hohen Anteil des $^3P_1$–Anfangszustandes und einem niedrigen Anteil von

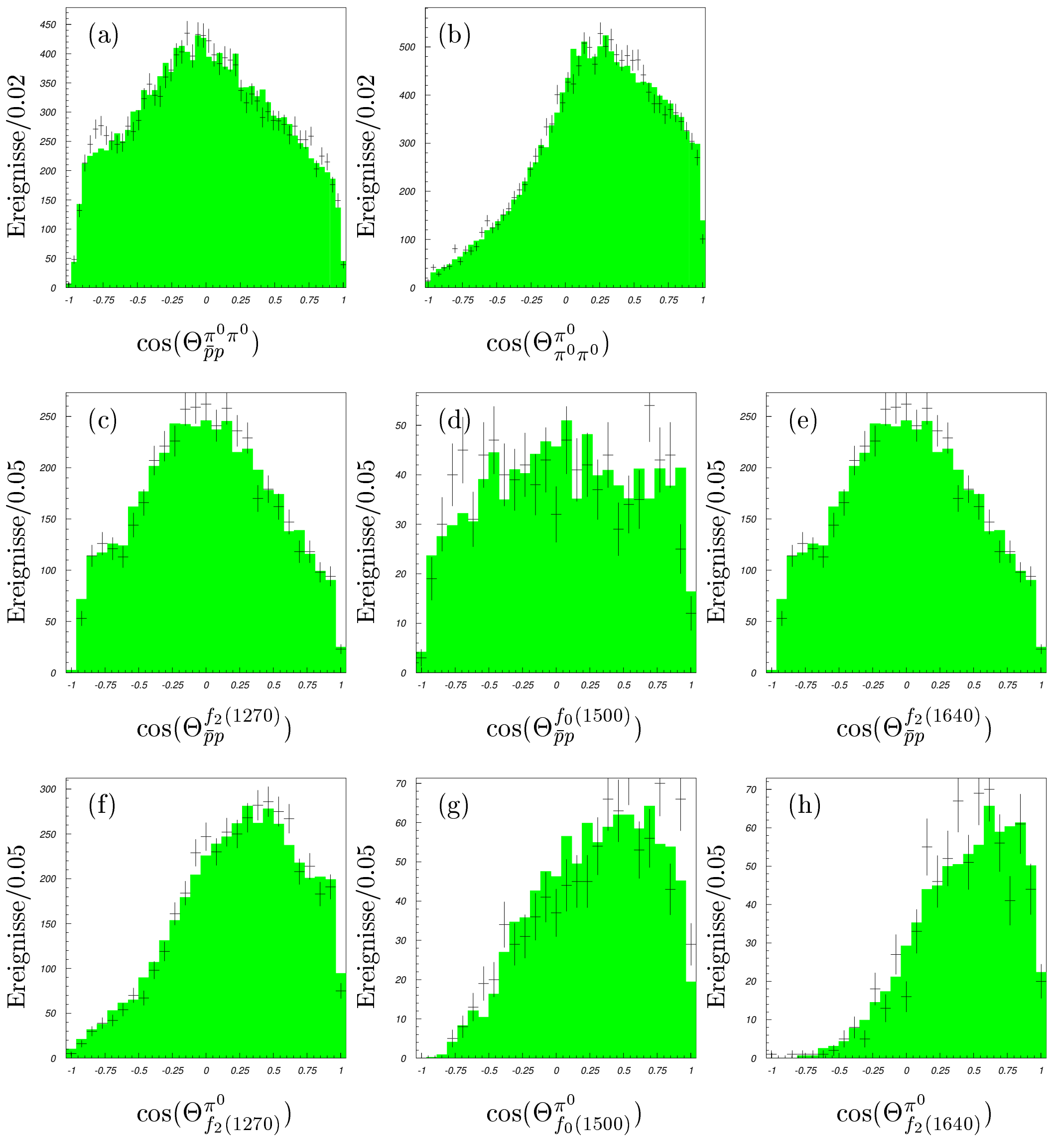

Abbildung 5.1: **Produktions– und Zerfallswinkel** – $\bar{p}\,(600\,\mathbf{MeV\!/\!}c)\,p \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$ **.**
Die Meßdaten sind dargestellt als Fehlerkreuze.
(a) Produktionswinkel – alle Ereignisse.
(b) Zerfallswinkel – alle Ereignisse.
(c, d, e) Produktionswinkel der Resonanzen ($|m_{\pi^0\pi^0} - m| \leq \Gamma/2$).
(f, g, h) Zerfallsswinkel der Resonanzen ($|m_{\pi^0\pi^0} - m| \leq \Gamma/2$).

$(^3P_2, {}^3F_2)$, ist die Situation in [29] gerade umgekehrt. Die Beiträge der Anfangszustände bzw. der partiellen Zerfallsamplituden werden von *TARA* berechnet, indem die Gewichte aller Ereignisse aufsummiert werden, wenn alle anderen partiellen Produktions– bzw. Zerfallsamplituden Null gesetzt sind. Die Summe der so berechneten Einzelsummen wird auf 100 % normiert. Die errechneten Beiträge berücksichtigen keine Interferenz–Effekte und sind daher mit großen Unsicherheiten behaftet. Dennoch erklärt dies nicht die Diskrepanz zwischen den Beiträgen der Anfangszustände $^3P_1$ und $(^3P_2, {}^3F_2)$, da zumindest die Größenordnungen verläßlich sein sollten.
Die Produktions– und Zerfallswinkel der Anpassung sind in Abbildung 5.1 dargestellt. Die Übereinstimmung zwischen den Datenereignissen (dargestellt als Fehlerkreuze) und der Anpassung ist gut. Bei kleinen Werten des integrierten Produktionswinkels $\cos(\Theta_{\bar{p}p}^{\pi^0\pi^0})$ (Abb. 5.1.a) ist allerdings eine geringe Abweichung festzustellen. Auch die Dalitzplots der Anpassung (Abb. 5.2.a) und der Daten (Abb.5.2.b) sowie die invarianten $\pi^0\pi^0$ Mas-

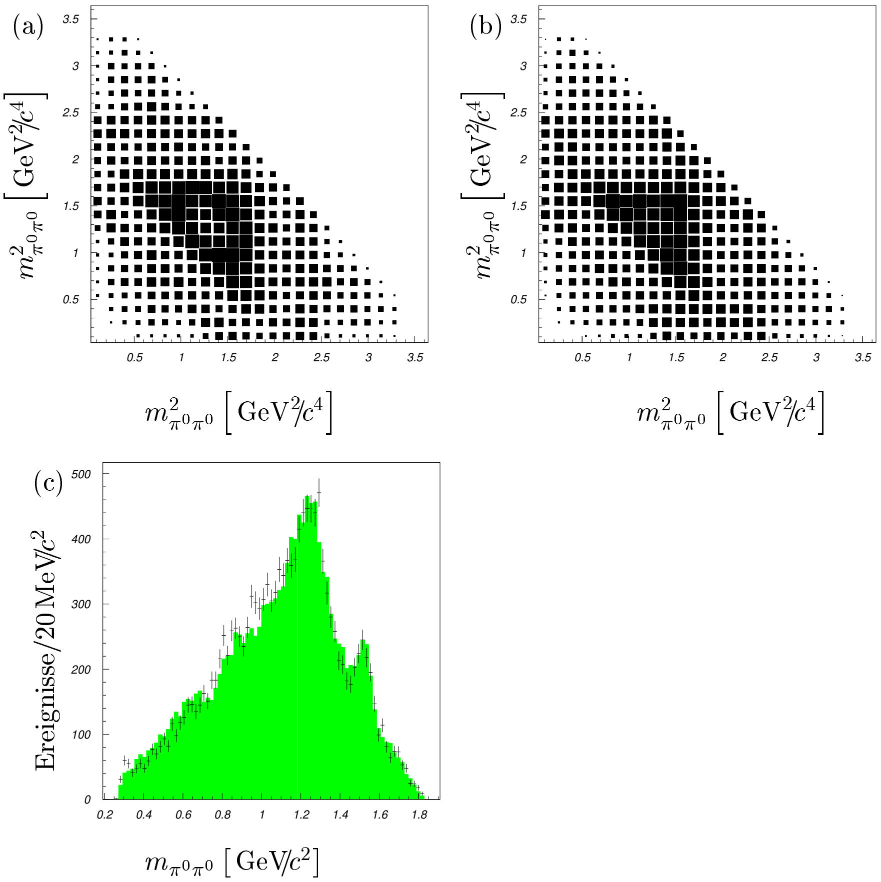

Abbildung 5.2: **Dalitzplot und invariante $\pi^0\pi^0$–Masse der Anpassung – $\bar{p}\,(600\,\mathrm{MeV/}c)\,p \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$.**
(a) Dalitzplot der Anpassung.
(b) Dalitzplot der Meßdaten.
(c) Invariante $\pi^0\pi^0$–Masse (Meßdaten als Fehlerkreuze).

sen (Abb.5.2.c) stimmen angesichts der geringen Statistik gut überein. Die Reanalyse des $\pi^0\pi^0\pi^0$–Endzustandes wurde für diese Arbeit lediglich durchgeführt, um das Programm *TARA* anhand eines bereits analysierten Endzustandes zu testen. Der Test ist erfolgreich verlaufen und stellt im wesentlichen weder die frühere Analyse noch das Programm in Frage. Obwohl das Programm *tps* im Gegensatz zu *TARA* speziell auf drei Pseudoskalare Teilchen im Endzustand zugeschnitten ist, braucht es für dieselbe Hypothese eine Größenordnung mehr Rechenzeit pro Ereignis[5] als *TARA*. Dies hat drei Hauptgründe:

1. Die symbolische Manipulation der Amplituden (siehe Anhang B.2) durch *TARA* bewirkt selbst in diesem im Vergleich zu den folgenden Endzuständen einfachen Fall eine starke Reduzierung der Anzahl der Rechenoperationen, die zur Laufzeit für eine Berechnung der Gewichtsfunktion durchgeführt werden.

2. Die von *TARA* generierte Hierarchie von Funktionsobjekten (siehe Anhang B.3) stellt sicher, daß bei der Berechnung der Gewichtsfunktion nur diejenigen Objekte neu berechnet werden, die sich durch Änderung eines oder mehrerer Parameter auch tatsächlich geändert haben. Nur wenn bei einer Neuberechnung der Gewichtsfunktion alle Parameter gleichzeitig geändert werden, müssen alle Parameter–abhängigen Objekte (Teilergebnisse) neu berechnet werden.

3. Die umfangreichen Möglichkeiten, die *TARA* bietet, eine Minimierungsstrategie vorzugeben (siehe Anhang A.1.3), erweisen sich als sehr wertvoll. Bei Minimierungsproblemen mit sehr vielen freien Parametern, wie es hier der Fall ist, ist es äußerst schwierig eine Konvergenz der Anpassung zu erreichen, wenn immer alle Parameter gleichzeitig zur Optimierung frei gegeben werden. Zudem gibt es im allgemeinen keine Möglichkeit, außer für die Sollmassen und Sollbreiten der Resonanzen, „gute“ Startwerte für die Parameter abzuschätzen.

Aus diesen Gründen gelang es bisher auch nicht Analysen von $\bar{p}p$–Annihilationen im Fluge, beim höchsten Strahlimpuls von 1940 MeV/*c* (z.B. die Endzustände mit drei pseudoskalaren Mesonen $\pi^0\pi^0\pi^0$, $\pi^0\pi^0\eta$, $\eta\eta\pi^0$und $\eta\eta\eta$), mit einer vollständigen Gewichtsfunktion durchzuführen.

5.2 $\bar{p}\,(1940\,\mathbf{MeV/}c)\,p \to \eta\eta\pi^0 \to 6\gamma$

Anstelle einer vollständigen Gewichtsfunktion wurde aus obigen Gründen in einer früheren Analyse die Reaktion $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV}/c)\,p \to \eta\eta\pi^0$ mit Hilfe eines stark vereinfachten Ansatzes auf der Basis des kanonischen Formalismus untersucht. Die genaue Form der dort verwendeten Gewichtsfunktion ist in [38] zu finden. In der älteren Analyse wurde auf eine Entwicklung nach $\bar{p}p$–Anfangszuständen ganz oder teilweise verzichtet, das heißt die Gewichtsfunktion ist so konstruiert, daß über die partiellen Produktions– und Zerfallsamplituden und über die Zerfallswinkel des $\bar{p}p$–Systems (quasi) integriert wird. Damit geht der Anpassung die Information aus den Winkeln $\cos(\Theta^{s^k}_{J_\mu}) = \cos(\Theta^{s^k}_{\bar{p}p})$ verloren, und eine Bestimmung der relativen Anteile der verschiedenen Anfangszustände ist nicht mehr möglich. Die Analyse verwendete zur Beschreibung des Zerfalls der Resonanzen den kanonischen Formalismus. Um die Anzahl der freien Parameter noch weiter zu reduzieren, wurden zusätzliche Annahmen darüber gemacht, welche der Resonanzen miteinander interferieren können und welche nicht. Im wesentlichen stützen sich diese Annahmen auf die Differenz der Sollmassen der Resonanzen, die in dieselben Teilchen zerfallen können. Je

[5] Eine Anpassung mit *tps* bei etwa viermal höherer Statistik dauerte bis zu einer Woche.

Resonanz	Masse $m \pm \sigma_m$ [MeV/c^2]	Breite $\Gamma \pm \sigma_\Gamma$ [MeV/c^2]	Beitrag [%]
$a_0(980)$	990 ± 15	140 ± 40	11 ± 1
$a_2(1320)$	1325 ± 20	180 ± 30	41 ± 2
$a_2(1650)$	1660 ± 40	280 ± 70	18 ± 1
$f_0(975)$	980 ± 50	70 ± 30	5 ± 1
$f_2(1270)$	1280 ± 40	200 ± 50	4 ± 2
$f_0(1500)$	1490 ± 10	50 ± 20	4 ± 1
$f_2(2150)$	2140 ± 30	310 ± 50	17 ± 1

Tabelle 5.3: **Massen und Breiten einer früheren Analyse** – $\bar{p}\,(1940\,\mathbf{MeV/}c)\,p \to \eta\eta\pi^0$.
In der früheren Analyse [38] konnte nicht zwischen Spin–0 und Spin–2 für die $\eta\eta$–Resonanz $f_2(2150)$ unterschieden werden. Außerdem weichen die Breiten des $a_2(1320)$ und des $f_0(1500)$ stark von denen in der $\bar{p}p$–Annihilation in Ruhe genauer bestimmten Werten ab.

größer diese Differenz ist, und je kleiner die Breiten der jeweiligen Resonanzen sind, um so geringer ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese Resonanzen (meßbar) miteinander interferieren. In einer vollständigen Gewichtsfunktion ist diese Freiheit nicht gegeben, da durch die beteiligten Anfangszustände festgelegt ist, welche Resoanzen miteinander interferieren können. Desweiteren wurden in der früheren Analyse die Sollmassen und Sollbreiten in einer einzelnen Anpassung nicht variiert. Stattdessen wurden zu einer einzelnen Hypothese sehr viele Anpassungen[6], mit jeweils anderen Werten für die Sollmasse und die Sollbreite **einer** Resonanz, durchgeführt, um auf diese Weise das Minimum in *NLL* bzgl. dieser beiden Parameter zu verbessern. Daher konnte nicht studiert werden, welchen Einfluß die Variation der Massen und Breiten aller Resonanzen gleichzeitig auf die Güte der Anpassung hat. Aus diesen Gründen wurde die Reaktion $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV/}c)\,p \to \eta\eta\pi^0$ mit *TARA* ein weiteres Mal analysiert, um gegebenenfalls die Ergebnisse des vereinfachten Ansatzes zu bestätigen oder zu wiederlegen. Es sei hier vorweggenommen, daß durch die Reanalyse mit einer vollständigen Beschreibung der Reaktion mit *TARA*, die in Tabelle 5.3 angegebenen Resonanzen und deren Massen und Breiten aus der früheren Analyse im wesentlichen bestätigt werden. Auffallend an den Ergebnissen der früheren Analyse ist der überraschend hohe Anteil an $a_2(1320)$ von 41%, der sich nur durch die viel zu große Breite von 180 MeV/c^2 erklären läßt. Bei einer Untersuchung mit sehr viel höherer Statistik desselben in der $\bar{p}p$–Annihilation in Ruhe gemessenen Endzustandes ergab sich hingegen eine Breite von $\Gamma_{a_2(1320)} = 112 \pm 3 \pm 2\,\mathrm{MeV/}c^2$ [56], die auch von mehreren anderen Experimenten (siehe [44]) bestätigt wird. Im Gegensatz zur Breite des $a_2(1320)$ ist die Breite des $f_0(1500)$ mit nur 50 MeV/c^2 viel zu klein. Auch in diesem Fall ist die Diskrepanz zu dem in der $\bar{p}p$–Annihilation in Ruhe genauer bestimmten Wert $\Gamma_{f_0(1500)} = 120 \pm 30\,\mathrm{MeV/}c^2$ [57, 58]) sehr groß.

Die Suche nach einer zufriedenstellenden Beschreibung einer Reaktion ist ein iterativer Prozeß, bei dem sowohl die Hypothese (Variation der Resonanzen), als auch die zusätzlichen Randbedingungen (Annahmen), wie zum Beispiel der maximal beitragende Drehimpuls des $\bar{p}p$–Systems, variiert werden. Hier werden nur die wesentlichen Schritte (Hypo-

[6]Eine einzelne Anpassung brauchte nur wenige Sekunden Rechenzeit.

Hypothese	$m_{a_2(1650)}$ $\Gamma_{a_2(1650)}$ [MeV/c^2]	$m_{f_2(1980)}$ $\Gamma_{f_2(1980)}$ [MeV/c^2]	$m_{f_0(2150)}$ $\Gamma_{f_0(2150)}$ [MeV/c^2]	$m_{f_0(1370)}$ $\Gamma_{f_0(1370)}$ [MeV/c^2]	$J_{\max}$	*NLL*	n_P
*A*1	1677 211	2147 317	– –	– –	2	-454	88
*A*2	1695 301	– –	2165 274	– –	2	-387	78
*B*1	1704 264	2138 375	– –	– –	3	-557	117
*B*2	1680 299	1992 498	2253 385	– –	3	-659	127
C	– –	1977 506	2270 370	– –	3	-518	103
*D*1	1683 288	1983 519	2160 258	– –	4	-764	177
*D*2	1659 276	1992 435	2156 230	– –	4 †	-694	135
E	1669 292	1996 459	2172 281	1357 270	3	-711	137
F	1683 304	1982 458	2149 203	1345 304	4 †	-734	147

Tabelle 5.4: **Ausgewählte Anpassungen** – $\bar{p}\,(1940\,\mathbf{MeV/}c)\,p \to \eta\eta\pi^0$.
Angegeben sind die Massen und Breiten der Resonanzen, die zusätzlich zu den vier Resonanzen $a_0(980)$, $a_2(1320)$, $f_2(1270)$, und $f_0(1500)$ mit in die Hypothese aufgenommen wurden. Die letzten drei Spalten geben den maximal beitragenden Drehimpuls der $\bar{p}p$–Anfangszustände J_{max}, den Minimalwert der NLL–Funktion und die Anzahl der freien Parameter n_P an.
† *In diesen Anpassungen wurden vernachlässigbare Zerfälle von der Hypothese ausgeschlossen.*

thesen) beschrieben, die zum Ergebnis der Reanalyse mit einer vollständigen Gewichtsfunktion führten.
Alle im folgenden diskutierten Anpassungen enthalten die Resoanzen $a_0(980)$, $a_2(1320)$, $f_2(1270)$ und $f_0(1500)$, die deutlich im Dalitzplot (Abb.5.3.a) zu erkennen sind (siehe auch Abb.3.8.a in Kapitel 3.3.1). Auf die Hinzunahme eines $f_0(975)$, das in $\eta\eta$ zerfällt, wurde verzichtet[7], da die Masse des $f_0(975)$ in Anbetracht der Breite des $f_0(975)$ relativ weit unterhalb der $\eta\eta$–Schwelle ($1,1\,\mathrm{GeV}/c^2$) liegt. Zusätzlich zu den vier genannten Resonanzen, wurden noch zwei weitere Resonanzen, ein Isovektor $a_2(1650)$ und ein schwerer Isoskalar $f_2(2150)$ in der besten Anpassung der früheren Analyse benötigt. Allerdings konnte für den Isoskalar der Spin nicht eindeutig geklärt werden, da Spin Null und Spin Zwei zu einer vergleichbar guten Anpassung führten.
Die nun diskutierten Anpassungen mit vollständigen Gewichtsfunktionen zu unterschiedlichen Hypothesen sind in Tabelle 5.4 aufgelistet. Die Minimierungsstrategie aller Anpassungen ist diejenige aus dem Beispiel in Kapitel A.1.3, Tabelle A.16. Um den Spin des

[7] Auch die Analyse mit dem vereinfachten Ansatz [38] konnte auf das $f_0(975)$ verzichten, ohne die Anpassung gravierend zu verschlechtern.

	λ	$^1S_0$	$^1D_2$	$^1G_4$	$^3P_1$	$^3F_3$	$(^3P_2,{}^3F_2)$	$(^3F_4,{}^3H_4)$	Σ
$a_0(980)$	0	1,6	6,0	3,0	0,1	0,1	–	–	10.8
$a_2(1320)$	0	3,2	1,1	c	0,9	0,3	–	–	
	±1	–	0,4	0,2	7,0	0,4	1,0	0,5	19,1
	±2	–	0,7	1,2	–	2,1	<0,1	0,5	
$a_2(1650)$	0	1,1	0,3	c	0,6	0,4	–	–	
	±1	–	0,2	c	1,3	<0,1	0,8	0,5	12,0
	±2	–	0,2	c	–	<0,01	4,9	1,6	
$f_2(1270)$	0	<0,1	0,2	1,2	c	0,5	–	–	
	±1	–	c	<0,1	0,3	0,5	0,9	0,2	5,4
	±2	–	0,6	0,4	–	c	0,3	0,1	
$f_0(1370)$	0	1,1	0,3	1,7	0,3	3,6	–	–	7,0
$f_0(1500)$	0	5,8	1,1	0,2	4,2	0,5	–	–	11,8
$f_2(1980)$	0	2,1	c	c	0,3	c	–	–	
	±1	–	c	c	2,0	c	<0,1	c	27,2
	±2	–	c	c	22,2	c	0,9	c	
$f_0(2150)$	0	c	0,2	c	5,7	0,8	–	–	6,7
Σ		14,9	11,4	7,9	44,6	9,3	8,9	3,0	

Tabelle 5.5: **Beiträge der partiellen Zerfallsamplituden der $\bar pp$–Anfangszustände – $\bar p\,(1940\,\mathbf{MeV/}c)\,p \to \eta\eta\pi^0$.**
Die Tabelle bezieht sich auf die Anpassung F aus Tab. 5.4, die das Ergebnis dieser Analyse ist. Aufgeführt sind die Beiträge in % der für $J_{max} = 4$ erlaubten partiellen Zerfallsamplituden $\left(\alpha^{\bar pp}_{\lambda_{(a,f)},\lambda_{(\eta,\pi^0)}} = \alpha^{\bar pp}_{\lambda_{(a,f)},0}\right)$ des $\bar pp$–Systems. Die mit einem c gekennzeichneten Beiträge sind exakt Null und gehören zu Zerfallsamplituden, die in der Anpassung F vernachlässigt wurden.

schweren Isoskalars $f_J(2150)$ zu bestimmen, wurden als erster Test die Anpassungen $A1$ und $A2$ durchgeführt, beide unter der Annahme, daß der maximal beitragende Gesamtdrehimpuls J_{max} im Anfangszustand Zwei ist. Die Hypothese $A1$ beinhaltet einen schweren Tensor $f_2(1980)$, die Anpassung $A2$ einen schweren Skalar $f_0(2150)$, daher werden für die Anpassung $A1$ zehn freie Parameter mehr benötigt. Das Minimum in *NLL* für die Hypothese $A1$ ist um 67 kleiner als für $A2$, also um $6,7$ besser pro freien Parameter mehr. Damit scheint die Natur des schweren Isoskalars geklärt – Spin–2 wird gegenüber Spin–0 eindeutig bevorzugt.
Analysen von Zweikörper–Endzuständen [59] ($\pi^0\omega$, $\eta\omega$ und andere Endzustände) der Proton–Antiproton Annihilation im Fluge haben ergeben, daß J_{max} bei einem Strahlimpuls von 1940 MeV/c kleiner Sieben ist. Aus diesem Grund ist es sehr unwahrscheinlich, daß für den $\eta\eta\pi^0$–Endzustand nur Anfangszustände bis $J_{\mathrm{max}} = 2$ beitragen, auch wenn fast doppelt soviel der zur Verfügung stehenden Energie im Schwerpunktsystem der Reaktion in den Massen der drei Endzustands–Teilchen „gebunden“ ist. Andererseits sind die Drehimpulse der hauptsächlich beitragenden Anfangszustände für jeden der in [59] vorgestellten Zweikörper—Endzustände kleiner als vier. Daher kann davon ausgegangen werden, daß zur Beschreibung von Dreikörper–Endzuständen mit entsprechend schweren intermediären Resonanzen ein maximaler Drehimpuls von Vier ausreichend ist. Aus diesen Gründen wurde die Anpassung $A1$ mit einem um Eins erhöhten Wert für J_{max} wiederholt ($B1$). Gegenüber der Anpassung $A1$ ergibt sich zur Hypothese $B1$, wie erwartet, ein um

Resonanz	Masse $m \pm \sigma_{m_{\text{stat}}} \pm \sigma_{m_{\text{sys}}}$ [MeV/c^2]	Breite $\Gamma \pm \sigma_{\Gamma_{\text{stat}}} \pm \sigma_{\Gamma_{\text{sys}}}$ [MeV/c^2]	Beitrag [%]
$a_0(980)$	$994 \pm 13 \pm 6$	$140 \pm 30 \pm 20$	11
$a_2(1320)$	$1320 \pm 10 \pm 4$	$113 \pm 18 \pm 10$	19
$a_2(1650)$	$1683 \pm 33 \pm 14$	$304 \pm 62 \pm 31$	12
$f_2(1270)$	$1270 \pm 17 \pm 7$	$213 \pm 57 \pm 45$	5
$f_0(1370)$	$1345 \pm 23 \pm 7$	$304 \pm 56 \pm 36$	7
$f_0(1500)$	$1492 \pm 9 \pm 3$	$98 \pm 24 \pm 22$	12
$f_2(1980)$	$1982 \pm 34 \pm 7$	$458 \pm 65 \pm 30$	27
$f_0(2150)$	$2149 \pm 36 \pm 40$	$203 \pm 57 \pm 59$	7

Tabelle 5.6: **Massen und Breiten** – $\bar{p}\,(1940\,\mathbf{MeV}/c)\,p \to \eta\eta\pi^0$**.** *Die systematischen Fehler wurden aus den Variationen der Werte bezüglich Anpassungen zu unterschiedlichen Hypothesen ermittelt. Die statistischen Fehler sind mit einem Faktor Drei skaliert, da diese lediglich aus einer parabolischen Näherung der NLL–Funktion in der Nähe des Minimums bestimmt wurden.*

103 besseres Minimum der *NLL*–Funktion. Dies entspricht einer Verbesserung um $3,5$ pro Parameter, wobei 29 zusätzliche freie Parameter benötigt werden. Wird die Hypothese $B1$ um einen schweren Skalar $f_0(2150)$ erweitert ($B2$), dann ist der Minimalwert der *NLL*–Funktion um 102 kleiner, obwohl nur weitere zehn Parameter benötigt werden. Tatsächlich wird daher die starke Überhöhung in der linken unteren Ecke des Dalitzplots und die diffuse Anhäufung in Richtung der kreuzenden $a_2(1320)$–Bänder nicht nur durch einen schweren Tensor, sondern auch durch einen schweren Skalar hervorgerufen. Durch die Integration über den Produktionswinkel $\cos(\Theta^{\eta\eta}_{\bar{p}p})$ (eine unabhängige Observable der Reaktion), konnten mit dem vereinfachten Ansatz diese beiden Resonanzen nicht aufgelöst werden. Da beide Spins tatsächlich vorhanden sind, konnte auch nicht zwischen Spin–0 und Spin–2 in der Region hoher $\eta\eta$–Massen entschieden werden.
Desweiteren galt es zu überprüfen, ob der neue Isovektor $a_2(1650)$ tatsächlich zur Beschreibung der Daten benötigt wird, zumal dieser weder im Dalitzplot, noch in der invarianten $\pi^0\eta$–Masse zu erkennen ist. Wird das $a_2(1650)$ aus der Hypothese $B2$ herausgenommen (Anpassung C), dann erhöht sich der Minimalwert von *NLL* um 141 auf -518, wobei die Anzahl der freien Parameter um 24 niedriger ist. Die Verschlechterung des Minimums um ca. $5,9$ pro Parameter, bestätigt die neue isovektorielle Resonanz $a_2(1650)$.
Anschließend wurde abermals der maximal beitragende Gesamtspin J_{max} um eine Einheit von Drei ($B2$) auf Vier ($D1$) erhöht. Bei diese Erhöhung von J_{max} ergab sich nur noch eine Verbesserung des Minimums der *NLL*–Funktion um $2,1$ pro Parameter, im Gegensatz zu $3,5$ pro Parameter bei der Erhöhung von Zwei auf Drei. Der Grund dafür ist, daß nicht alle partiellen Zerfallsamplituden des $\bar{p}p$–Anfangszustandes zum Endzustand beitragen. Daher sind diejenigen Zerfallsamplituden, die nur unwesentlich beitragen, exakt zu Null gesetzt (siehe symbolische Manipulation der Gewichtsfunktion in Anhang B.2). Das Kriterium dafür ist, daß solche Zerfälle in möglichst allen Anpassungen (es wurden mehr Hypothesen getestet als in Tab. 5.4 aufgelistet) zu verschiedenen Hypothesen vernachlässigbar sind. Zum Beispiel sind alle Zerfälle von Anfangszuständen mit Gesamtdrehimpuls größer Zwei in $f_2(1980) + \pi^0$ vernachlässigbar. Insgesamt sind 17 partielle Zerfallsamplituden in den Anpassungen $D2$ und F vernachlässigt. Diese sind in der Tabelle 5.5 mit einem c ge-

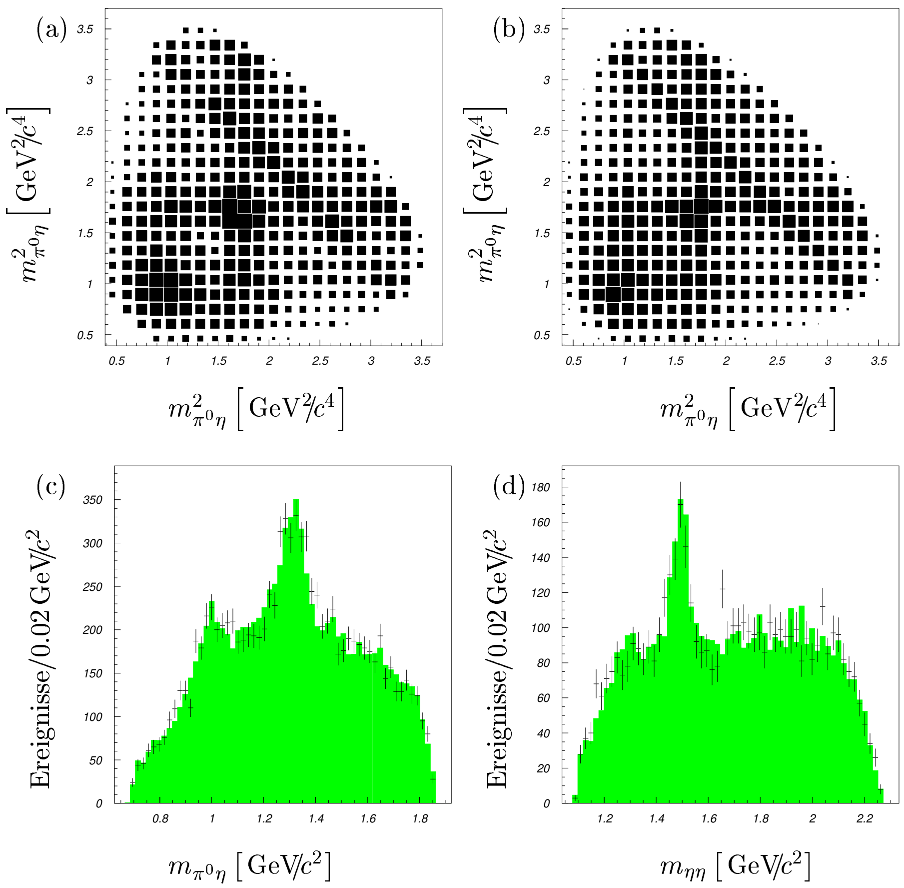

Abbildung 5.3: **Dalitzplot und invariante Massen der Anpassung – $\bar{p}$ (1940 MeV/c) $p \to \eta\eta\pi^0$.**
(a) Dalitzplot der Anpassung F aus Tab. 5.4.
(b) Dalitzplot der Datenereignissse.
(c) $\eta\eta$-invariante Masse.
(d) $\pi^0\eta$-invariante Masse.
In den Spektren (c) und (d) sind die Meßdaten dargestellt als Fehlerkreuze.

kennzeichnet. Werden diese partiellen Zerfallsamplituden vernachlässigt, dann verbessert sich das Minimum der *NLL*–Funktion im Vergleich zur Anpassung mit $J_{\max} = 3$ ($B2$) um 35 bei nur zwölf Parametern mehr, also um 2,9 pro Parameter. In der lezten getesteten Hypothese (F), die das Ergebnis der Analyse des $\eta\eta\pi^0$–Endzustandes ist, wurde noch zusätzlich ein $f_0(1370)$ berücksichtigt, das bereits in den Analysen der $\bar{p}p$–Annihilation in Ruhe zur Beschreibung des $\eta\eta\pi^0$–Endzustandes benötigt wurde. Die Anpassung F hat ein um 40 (3,3 pro Parameter) besseres Minimum als die entsprechende Anpassung ohne $f_0(1370)$. Schließlich ist noch die Anpassung E mit $J_{\max} = 3$ vorgenommen worden, um zu überprüfen, ob die Notwendigkeit des $f_0(1370)$ nur ein Artefakt der Vernachlässigung der oben genannten partiellen Zerfallsamplituden ist. Im Vergleich zur Anpassung $B2$ ergibt sich eine Verbesserung des Minimums um sogar 5,2 für jeden zusätzlichen Parameter, der

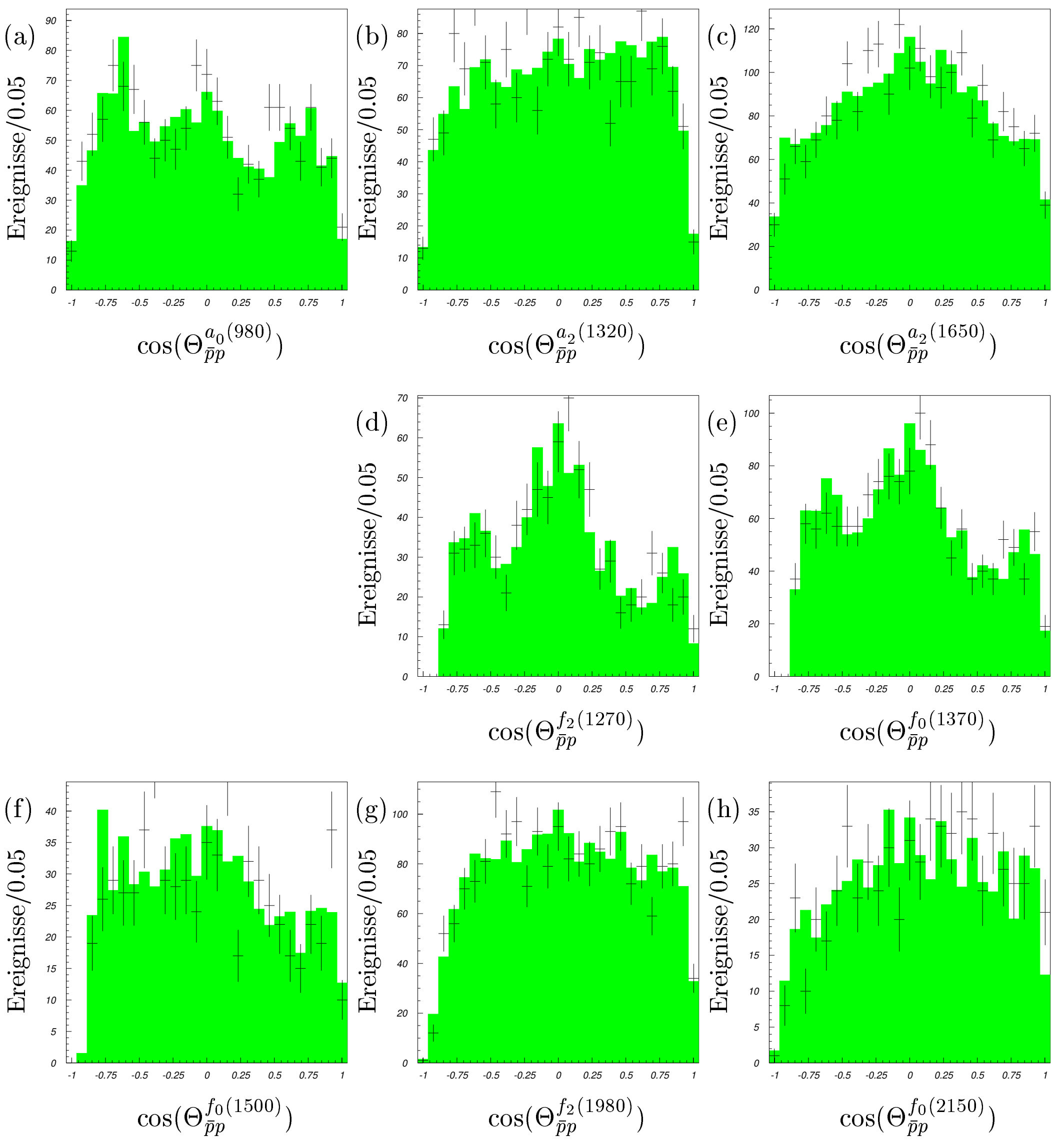

Abbildung 5.4: **Produktionswinkel der Resonanzen** – $\bar{p}\,(1940\,\mathbf{MeV\!/\!}c)\,p \to \eta\eta\pi^0$**.** *Gezeigt sind die Produktionswinkelverteilungen der besten Anpassung (Anpassung F aus Tabelle 5.4). Die Meßdaten sind dargestellt als Fehlerkreuze. (a, b, c) Produktionswinkel der $\pi^0\eta$–Resonanzen ($|m_{\pi^0\eta} - m| \leq \Gamma/2$). (d, e, f, g, h) Produktionswinkel der $\eta\eta$–Resonanzen ($|m_{\eta\eta} - m| \leq \Gamma/2$).*

zur Beschreibung des $f_0(1370)$ benötigt wird.
Die Endergebnisse sind in den Tabellen 5.5 und 5.6 zusammengefaßt. Die systematischen Fehler für die Massen und die Breiten (Tab. 5.6) der Resonanzen sind aus der Variation derselben in allen (sinnvollen) Anpassungen bestimmt worden. Der systematische Fehler, der aus einer Variation der Form der dynamischen Funktionen resultiert, ist gegen diese Schwankungen vernachlässigbar. Die Massen und Breiten der wohlbekannten Resonanzen,

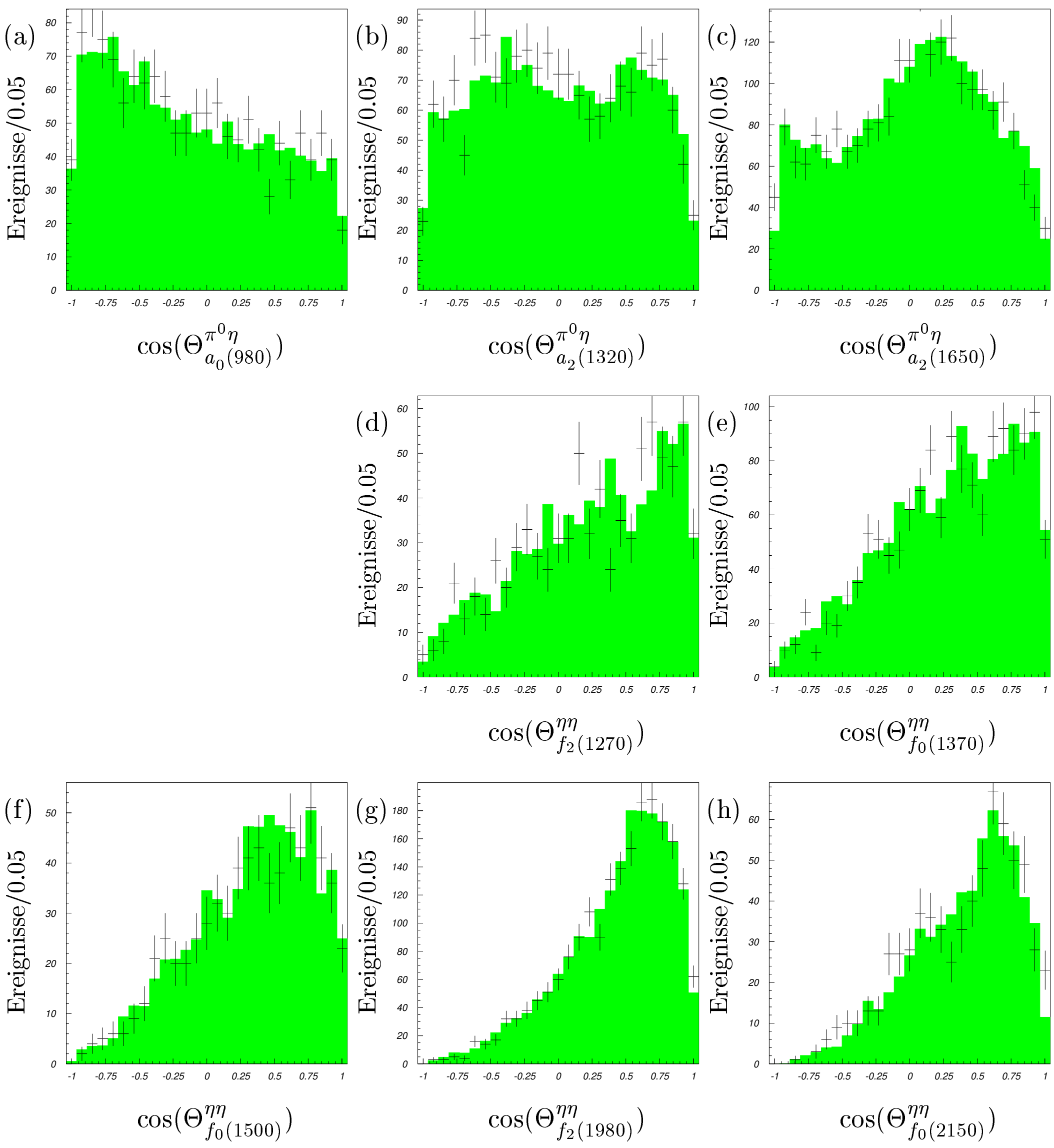

Abbildung 5.5: **Zerfallswinkel der Resonanzen – $\bar{p}\,(1940\,\mathbf{MeV}/c)\,p \rightarrow \eta\eta\pi^0$.** *Gezeigt sind die Zerfallswinkelverteilungen der besten Anpassung (Anpassung F aus Tabelle 5.4). Die Meßdaten sind dargestellt als Fehlerkreuze. (a, b, c) Zerfallswinkel der $\pi^0\eta$–Resonanzen ($|m_{\pi^0\eta} - m| \leq \Gamma/2$). (d, e, f, g, h) Zerfallswinkel der $\eta\eta$–Resonanzen ($|m_{\eta\eta} - m| \leq \Gamma/2$).*

insbesondere des $a_2(1320)$-Mesons und des *Glueball*–Kandidaten $f_0(1500)$, stimmen im Gegensatz zur früheren Analyse sehr gut mit den in [44] angegebenen Werten überein. Der Dalitzplot und die invarianten Massenspektren der besten Anpassung (F) sind in Abbildung 5.3 gezeigt. In Abbildung 5.4 sind die Produktionswinkel, die in der früheren Analyse unberücksichtigt blieben, und in Abbildung 5.5 die Zerfallswinkel der Resonanzen dargestellt. Alle Spektren sind automatisch von *TARA* am Ende der Minimierung erzeugt worden. Die Übereinstimmung zwischen den Spektren der Datenereignisse und der Anpassung ist sehr gut.

5.3 $\bar{p}\,(1940\,\mathbf{MeV\!/\!c})\,p \to K^+K^-\pi^0 \to K^+K^-2\gamma$

Der Versuch die Reaktion $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV\!/\!c})\,p \to K^+K^-\pi^0$ mit dem vereinfachten Ansatz, der für die frühere Analyse des $\eta\eta\pi^0$–Endzustandes verwendet wurde, zu untersuchen scheiterte. Da jeder $\bar{p}p$–Anfangszustand beitragen kann, sind so viele verschiedene Interferenzen möglich, daß eine Einbeziehung der Produktionswinkel unabdingbar wird. Der Grund dafür wurde bereits bei der Diskussion der Anfangszustände in Kapitel 4.3.3 erläutert. Da weder der $K^+K^-\pi^0$–Endzustand noch die $\bar{p}p$–Anfangszustände einen definierten Isospin besitzen, ist der Isospin der intermediären Resonanzen, die in K^+K^- zerfallen nicht eindeutig. Jede K^+K^-–Resonanz mit geradzahligen Spin kann daher ein a– oder ein f–Meson und jede mit ungeradzahligen Spin ein ρ– oder ϕ–Meson sein. Daher werden außer dem $\phi(1020)$-Meson im folgenden alle K^+K^-–Resoanzen mit a_Jf_J beziehungsweise $\rho_J\phi_J$ bezeichnet. Für das $\phi(1020)$ ist die Zuordnung eindeutig, da es bei einer Masse von $1\,\mathrm{GeV\!/\!c^2}$ kein anderes Teilchen gibt, das eine so geringe Breite hat und so stark an K^+K^- koppelt. Das $\phi(1020)$ ist als Nadel im Spektrum der invarianten K^+K^--Masse (Abbildung 5.10.d) deutlich zu erkennen. Ebenso deutlich sticht das $K^*(893)$ aus dem Spektrum der invarianten $K^\pm\pi^0$-Masse (Abbildung 5.10.c) hervor. Damit steht fest, daß alle Anfangszustände beitragen können, unabhängig davon welcher maximale Drehimpuls $J_{\max}$ für die Anfangszustände gewählt wird, denn jeder Anfangszustand kann in jede $K^\pm\pi^0$–Resonanz (und ein Kaon) mit Spin größer Null zerfallen. Aus diesem Grund werden sehr viele freie Parameter zur Beschreibung der Reaktion benötigt[8]. Die vielen Strukturen im Dalitzplot wurden bereits in Kapitel 3.4.2 beschrieben. Der Dalitzplot der Datenereignisse ist noch einmal in Abbildung 5.10.b gezeigt. Besonderes Interesse bei der Untersuchung des $K^+K^-\pi^0$–Endzustandes gilt den K^+K^-–Resonanzen, da alle $K^\pm\pi^0$–Resonanzen wohlbekannte Mesonen sind. Jede der im folgenden beschrieben Anpassungen enthält daher das $K^*(893)$–Meson, das $K_0(1430)$–Meson und das $K_2(1430)$–Meson. Mit diesen drei Kaonen kann das gesamte invariante $K\pm\pi^0$–Massenspektrum beschrieben werden. Die Überhöhung bei etwa $1.6\,\mathrm{GeV\!/\!c^2}$ im $K\pm\pi^0$–Spektrum (siehe Abb. 5.10.c), die auf ein weiteres Kaon hinzudeuten scheint, kann allein durch K^+K^-–Resonanzen erklärt werden[9]. Außerdem berücksichtigt jede Anpassung die zwei K^+K^-–Systeme mit kleiner Masse, deren Spins bekannt sind. Diese sind das $\phi(1020)$–Meson mit Spin Eins und zur Beschreibung der $1300\,\mathrm{MeV\!/\!c^2}$–$K^+K^-$–Massenregion ein $a_2f_2(1300)$, welches sowohl das $a_2(1320)$– oder das $f_2(1270)$–Meson sein könnte.

5.3.1 Untersuchung der $1500\,\mathbf{MeV\!/\!c^2}$–$K^+K^-$–Massenregion

Zur Beschreibung der Spitze in der invarianten K^+K^-–Masse bei $1500\,\mathrm{MeV\!/\!c^2}$ bieten sich gleich drei Resonanzen an: $a_0(1450)$, $f_0(1500)$ und $f_2'(1525)$. Um den Spin in der $1500\,\mathrm{MeV\!/\!c^2}$–$K^+K^-$–Massenregion zu klären, wurden daher Anpassungen durchgeführt, die zusätzlich zu den fünf oben angeführten Resonanzen zwei weitere enthielten: $a_0f_0(1500)$ und $a_2f_2(1700)$ oder $a_2f_2(1500)$ und $a_0f_0(1700)$Ḋiese Anpassungen wurden jeweils für $J_{\max}=2$ und $J_{\max}=3$ vorgenommen. Die Anpassung mit einem zusätzlichen $a_0f_0(1500)$

[8]Um z.B. alle erlaubten Zerfälle des $\bar{p}p$–Systems mit $J_{\max}=3$ in $K_2(1430)+\pi^0$ zu beschreiben, werden 22 partielle Zerfallsamplituden (siehe Tabelle 4.2) und damit 44 freie Parameter benötigt.

[9]Alle Anpassungen, die K^+K^-–Systeme mit einer Masse von bis zu $1.7\,\mathrm{GeV\!/\!c^2}$ beinhalten, beschreiben die Spitze bei $1.6\,\mathrm{GeV\!/\!c^2}$ im $K\pm\pi^0$–Spektrum gut.

unterscheidet sich nur wenig im Wert des Minimums der *NLL*–Funktion. Die Anpassungen mit $a_2 f_2(1500)$ sind mit einer Verbesserung um weniger als Eins (für $J_{\max} = 3$ nur 0,6) pro zusätzlichen Parameter nur marginal besser und tendieren zu kleineren Breiten der Resonanz (um etwa 60 MeV/c^2), wie man es erwarten würde, wenn die Resonanz ein $f_2'(1525)$ wäre. Die Spitze in der invarianten K^+K^-–Masse (Abb. 5.10.d) erscheint jedoch (rein optisch) fast doppelt so breit. Deswegen wurde in allen weiteren Anpassungen zur Beschreibung der 1500 MeV/c^2–K^+K^-–Massenregion ein $a_0 f_0(1500)$ verwendet, da es mit weniger Parametern zu einer fast gleich guten (rein optisch sogar besseren) Beschreibung führt. Dies schließt die Präsenz eines $f_2'(1525)$ allerdings nicht aus (und natürlich auch nicht eines $a_0(1450)$).

5.3.2 Untersuchung der 1700 MeV/c^2–K^+K^-–Massenregion

Die experimentelle Situation im Spektrum der leichten Mesonen in der 1700 MeV/c^2–K^+K^-–Massenregionist so dürftig, daß ad hoc kein bevorzugter Kandidat zur Beschreibung des Spektrums genannt werden kann. Daher wurden sukzessive alle Spins von Null bis Drei ausprobiert. In Tabelle 5.7 sind alle diesbezüglichen Anpassungen zusammengefaßt. Die dort angegeben Änderungen der Anzahl der Parameter und der Minima der *NLL*–Funktion Δ_{NLL} beziehen sich auf eine Basisanpassung, die folgende Resonanzen enthält: $K^*(893)$, $K_0(1430)$, $K_2(1430)$, $\phi(1020)$, $a_2 f_2(1300)$, $a_0 f_0(1500)$ und $a_0 f_0(1700)$. Wird die letzte Resonanz in der Basisanpassung ($a_0 f_0(1700)$) durch ein $a_2 f_2(1700)$ ersetzt (Anpassung $F1$ bzw. $F1'$), dann ist die Änderung Δ_{NLL} der *NLL*–Funktion negativ. Also ergibt ein $a_2 f_2(1700)$ eine bessere Beschreibung der Daten. Wird das $a_0 f_0(1700)$ durch eine Resonanz mit ungeraden Spin ersetzt (Anpassungen $F2$ und $F3$ bzw. $F2'$ und $F3'$), dann ergibt sich für $J_{\max} = 2$ eine geringere Verbesserung als für die Ersetzung durch ein $a_2 f_2(1700)$. Wird der maximal beitragende Gesamtdrehimpuls $J_{\max}$ des $\bar{p}p$–Systems zu Drei gewählt, dann ist die Änderung Δ_{NLL} positiv, obwohl mehr freie Parameter zur Anpassung eines $\rho_1\phi_1(1700)$ oder eines $\rho_3\phi_3(1700)$ anstelle eines $a_0 f_0(1700)$ benötigt werden. Daher kann ungerader Spin für die 1700 MeV/c^2–K^+K^-–Massenregion ausgeschlossen werden. In der letzten Anpassung von Tabelle 5.7 wurde das $a_0 f_0(1700)$ in der Hypothese belassen und zusätzlich ein $a_2 f_2(1700)$ in die Anpassung aufgenommen (Anpassung $F4$ bzw. $F4'$). Die

$a_0 f_0(1700)$	$J_{\max} = 2$				$J_{\max} = 3$			
ersetzt durch	Nr.	Δ_P	Δ_{NLL}	$\frac{\Delta_{NLL}}{\Delta_P}$	Nr.	Δ_P	Δ_{NLL}	$\frac{\Delta_{NLL}}{\Delta_P}$
$a_2 f_2(1700)$	$F1$	10	-36	-3,6	$F1'$	14	-29	-2,1
$\rho_1\phi_1(1700)$	$F2$	4	-11	-2,8	$F2'$	8	+ 5	+0,6
$\rho_3\phi_3(1700)$	$F3$	6	-13	-2,2	$F3'$	18	+ 6	+0,3
$a_0 f_0(1700)$+ $a_2 f_2(1700)$	$F4$	16	-62	-3,9	$F4'$	22	-49	-2,2

Tabelle 5.7: **Anpassungen mit verschiedenen Spins in der K^+K^-–Massenregion 1700 MeV/c^2 – $\bar{p}$ (1940 MeV/c) $p \to K^+K^-\pi^0$**
Gezeigt sind die Anzahl der zusätzlichen Parameter Δ_P und die Änderung des Minimums der NLL–Funktion Δ_{NLL}, wenn, ausgehend von einer Basisanpassung mit einer Spin–0–Resonanz $a_0 f_0(1700)$, diese durch Resonanzen mit anderem Spin erzetzt wird. Die Basisanpassung berücksichtigt die Resonanzen $K^*(893)$, $K_0(1430)$, $K_2(1430)$, $\phi(1020)$, $a_2 f_2(1300)$, $a_0 f_0(1500)$ und $a_0 f_0(1700)$ und hat für $J_{max} = 2(3)$ 117 (168) Parameter. Das Minimum der NLL–Funktion hat einen Wert von -1273 (-1401).

Änderung der *NLL*–Funktion Δ_{NLL} ist in diesem Fall größer als in allen anderen Fällen. Dies läßt vermuten, daß vielleicht sogar beide Resonanzen zur Beschreibung der Daten benötigt werden. Wird jedoch die absolute Änderung auf die Anzahl der zusätzlichen Parameter bezogen, dann zeigt sich bereits hier, daß die Anpassung $F1$ ($F1'$), in der nur ein $a_2f_2(1700)$ anstelle eines $a_2f_2(1700)$ und eines $a_0f_0(1700)$ ($F4$, $F4'$) verwendet wird, nicht wesentlich schlechter ist.

5.3.3 Gesamte K^+K^-–Massenregion

Die im folgenden diskutierten Anpassungen enthalten K^+K^-–Systeme im gesamten K^+K^-–Massenbereich. Der in Kapitel 3.4.2 beschriebene symmetrisierte Dalitzplot besitzt noch eine weitere Struktur, die einer K^+K^-–Resonanz mit einer Masse oberhalb von 1.9 GeV/c^2 entsprechen könnte.
Wird der $K^+K^-\pi^0$–Dalitzplot nicht symmetrisiert, dann ist diese Struktur – ein Band senkrecht zur Diagonalen in der linken unteren Ecke – nur noch schwer zu erkennen (siehe Abb. 5.10.b am Ende des Kapitels) und erscheint eher als diffuse Anhäufung. Um die gesamte Reaktion $\bar{p}\,(1940\,\text{MeV/}c)\,p \to K^+K^-\pi^0$ zu beschreiben wurden zwei Anpassungen (A,B) vorgenommen. Beide Anpassungen berücksichtigen alle Anfangszustände bis

	λ	$^1S_0$	$^1P_1$	$^1D_2$	$^1F_3$	$^3P_1$	$^3D_2$	$^3F_3$	$^3S_1$, $^3D_1$	$^3P_2$, $^3F_2$	$^3D_3$, $^3G_3$
$K^*(893)$	0	2,9	3,7	0,0	4,0	4,0	0,3	4,9	–	–	–
	±1	–	1,2	0,6	0,1	2,1	1,5	5,6	39,1	22,8	4,2
$K_0(1430)$	0	77,1	74,0	166,1	9,7	9,7	3,4	4,0	–	–	–
$K_2(1430)$	0	0,0	3,6	1,1	1,5	8,9	0,2	3,1	–	–	–
	±1	–	0,3	1,7	2,3	112,0	63,6	17,0	98,1	85,7	13,7
	±2	–	–	2,0	0,8	–	0,3	2,3	–	5,7	3,3
$\phi(1020)$	0	–	18,1	–	24,9	–	0,4	–	–	–	–
	±1	–	0,2	–	1,2	–	0,6	–	1,0	–	
$a_2f_2(1300)$	0	3,7	–	0,4	–	0,5	–	0,7	–	–	–
	±1	–	–	0,0	–	3,5	–	1,2	–	2,0	–
	±2	–	–	1,8	–	–	–	2,2	–	0,1	–
$a_0f_0(1500)$	0	3,3	–	1,7	–	0,9	–	1,0	–	–	–
$a_2f_2(1700)$	0	1,8	–	1,0	–	0,8	–	1,2	–	–	–
	±1	–	–	0,4	–	0,9	–	2,6	–	0,8	–
	±2	–	–	0,9	–	–	–	0,1	–	1,1	–
$a_0f_0(1700)$	0	4,8	–	0,3	–	0,1	–	0,3	–	–	–
$a_2f_2(1900)$	0	3,3	–	0,3	–	0,0	–	0,5	–	–	–
	±1	–	–	0,2	–	0,9	–	0,8	–	0,1	–
	±2	–	–	1,2	–	–	–	0,7	–	0,3	–

Tabelle 5.8: **Beiträge der partiellen Zerfallsamplituden der $\bar{p}p$–Anfangszustände – $\bar{p}\,(1940\,\text{MeV/}c)\,p \to K^+K^-\pi^0$.**
Die Tabelle bezieht sich auf die zur Gruppe B aus Tab. 5.9 gehörige „volle" Hypothese (alle erlaubten Zerfälle des $\bar{p}p$–Systems berücksichtigt) mit allen neun Resonanzen (216 freie Parameter). Aufgeführt sind die Beiträge in °/°° der für $J_{max} = 3$ erlaubten partiellen Zerfallsamplituden ($\alpha^{\bar{p}p}_{\lambda_{a,f},\lambda_{\eta,\pi^0}} = \alpha^{\bar{p}p}_{\lambda_{a,f},0}$) des $\bar{p}p$–Systems.

$J_{\max} = 3$ und alle erlaubten Zerfälle der acht Resonanzen: $K^*(893)$, $K_0(1430)$, $K_2(1430)$, $\phi(1020)$, $a_2f_2(1300)$, $a_0f_0(1500)$, $a_2f_2(1700)$ und $a_0f_0(1700)$. A und B unterscheiden sich in der neunten Resonanz. Für A wurde ein $a_0f_0(1900)$ und für B ein $a_2f_2(1900)$ angenommen, um die 1900 MeV/c^2–K^+K^-–Massenregion zu beschreiben. Beide Anpassungen

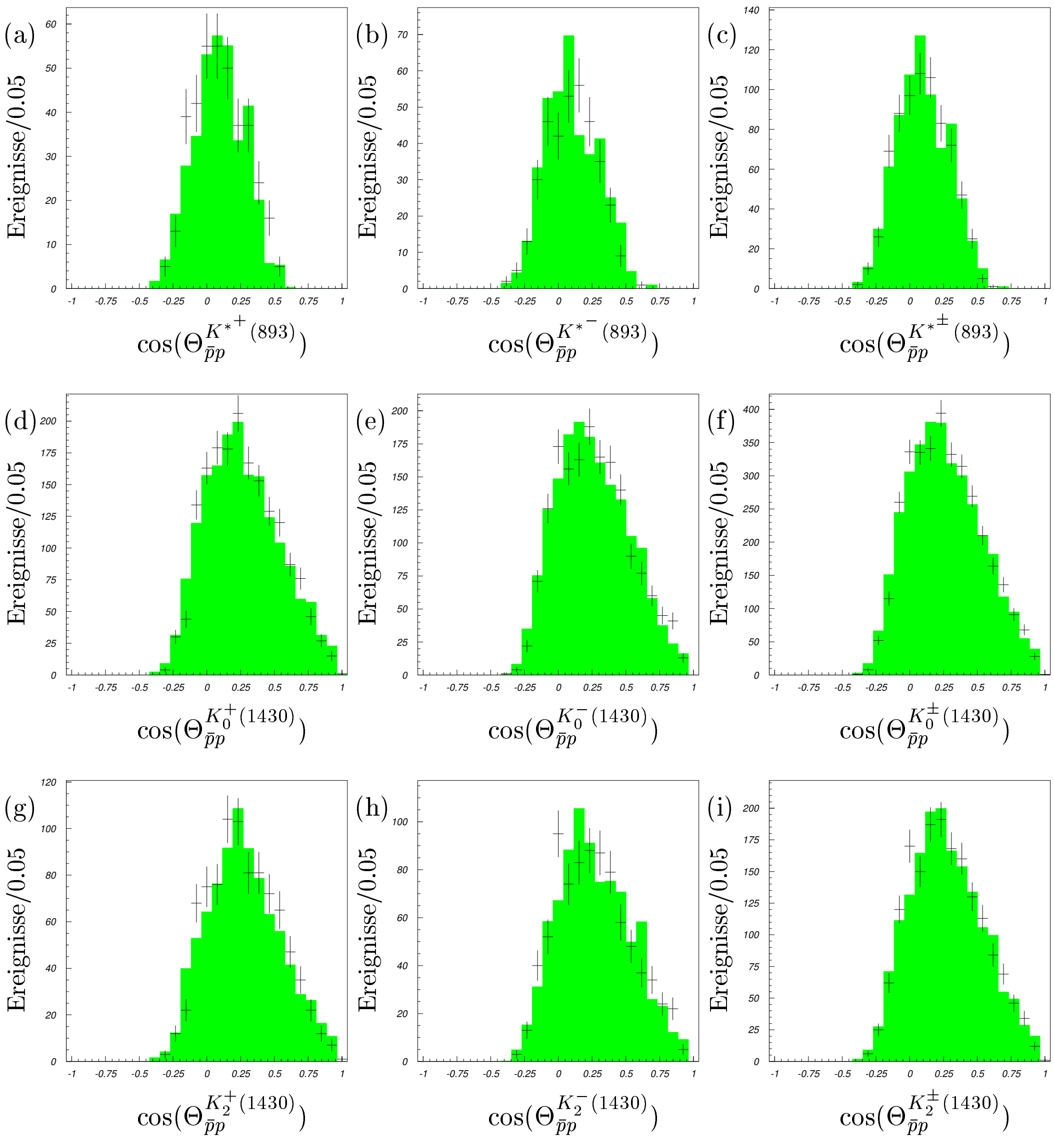

Abbildung 5.6: **Produktionswinkel der $K\pi$-Resonanzen – $\bar{p}\,(1940\,\mathbf{MeV/}c)\,p \to K^+K^-\pi^0$.**
Gezeigt sind die Produktionswinkelverteilungen der Resonanzen aus der Anpassung B' (Tabelle 5.9) für $|m_{K^\pm\pi^0} - m| \leq \Gamma/2$. Die Meßdaten sind dargestellt als Fehlerkreuze. Die Histogramme der letzten Spalte (c, f, i) stellen die Summe der Histogramme der ersten beiden Spalten dar.

benötigen sehr viele freie Parameter (A: 202, B: 216) und haben vergleichbar gute Minima der NLL–Funktion (A: $-1457,8$, B: $-1475,5$). Die errechneten Beiträge aller erlaubten partiellen Zerfälle verfügen, wegen der großen Anzahl von freien Parametern und der nur kleinen Anzahl an verfügbaren Datenereignissen, nur über eine geringe Aussagekraft. Exemplarisch sind die Beiträge der erlaubten partiellen Zerfälle in Tabelle 5.8 in $^\circ/_{\circ\circ}$ für Anpassung B angegeben. Insbesondere die sehr kleinen Beiträge (um $1\,^\circ/_{\circ\circ}$) variieren bis zu einem Faktor Vier mit der verwendeten Hypothese. Die Beiträge wurden dazu verwendet die Anzahl der freien Parameter zu reduzieren. Dazu wurden die errechneten Beiträge aller Anpassungen[10] miteinander verglichen. Danach sind diejenigen partiellen Zerfallsamplituden, die in möglichst allen Anpassungen weniger als 1 % zu einem Zerfallskanal beitragen[11] exakt zu Null gesetzt worden (siehe symbolische Manipulation der Gewichtsfunktion in Anhang A.1.2.5 und Anhang B.2). Diese partiellen Zerfallsamplituden waren im einzelnen:

[10] Gemeint sind tatsächlich alle Anpassungen, nicht nur diejenigen, die hier beschrieben sind.

[11] Im Unterschied zu den Beiträgen von Tabelle 5.8, die auf den gesamten Endzustand bezogen sind.

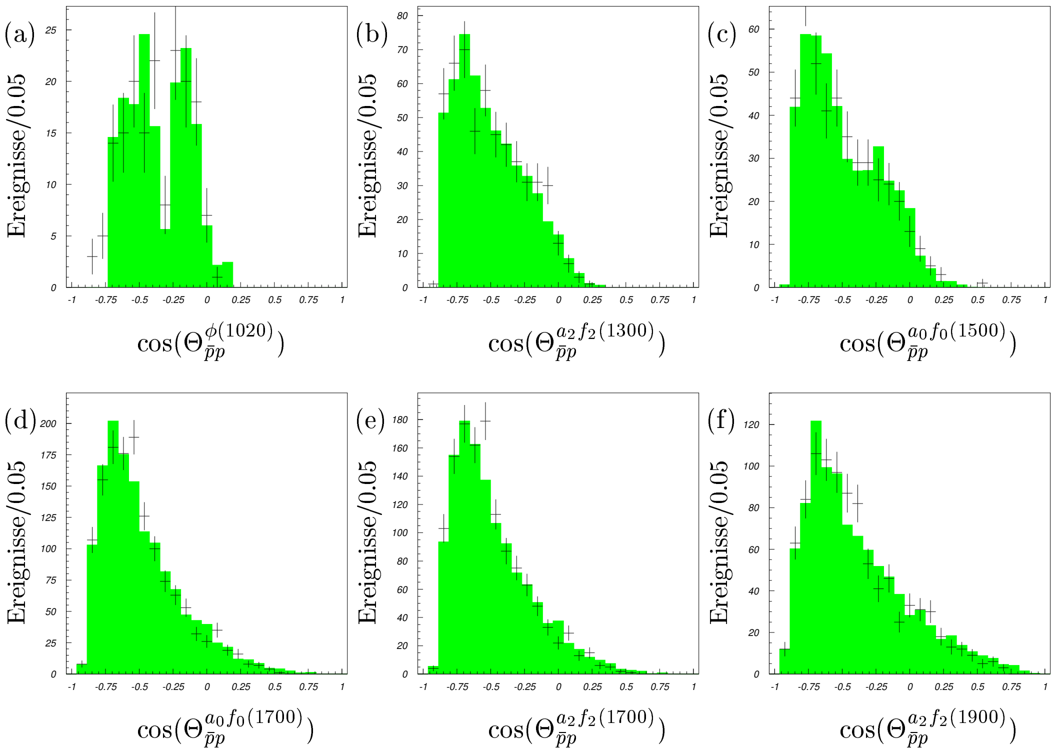

Abbildung 5.7: **Produktionswinkel der K^+K^--Resonanzen** – $\bar{p}\,(1940\,\mathbf{MeV\!/\!}c)\,p \to K^+K^-\pi^0$.
Gezeigt sind die Produktionswinkelverteilungen der Resonanzen aus der Anpassung B' (Tabelle 5.9) für $|m_{K^+K^-} - m| \leq \Gamma/2$. Die Meßdaten sind dargestellt als Fehlerkreuze.

$$\alpha_{0,0}^{^3D_2\to K_0(1430)+K},\ \alpha_{0,0}^{^1F_3\to K_0(1430)+K},\ \alpha_{\pm1,0}^{^1P_1\to K_2(1430)+K},\ \alpha_{0,0}^{^3P_1\to K_2(1430)+K},$$

$$\alpha_{\pm1,0}^{^1D_2\to K_2(1430)+K},\ \alpha_{\pm2,0}^{^1D_2\to K_2(1430)+K},\ \alpha_{0,0}^{^3D_2\to K_2(1430)+K},\ \alpha_{\pm2,0}^{^3D_2\to K_2(1430)+K},$$

$$\alpha_{\pm2,0}^{^3P_2,^3F_2\to K_2(1430)+K},\ \alpha_{0,0}^{^1F_3\to K_2(1430)+K},\ \alpha_{\pm1,0}^{^1F_3\to K_2(1430)+K},\ \alpha_{\pm2,0}^{^1F_3\to K_2(1430)+K},$$

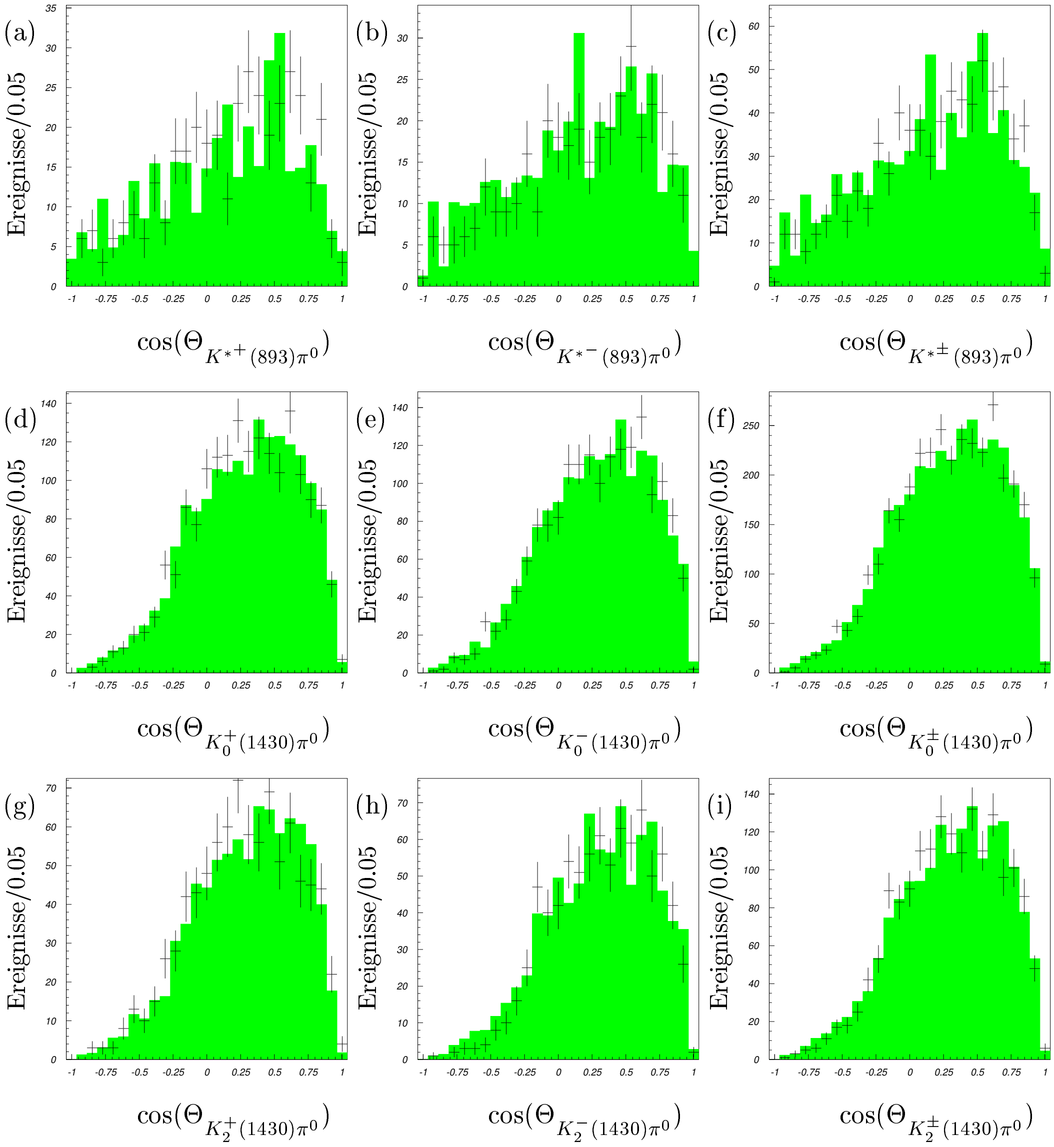

Abbildung 5.8: **Zerfallswinkel der $K\pi$-Resonanzen** – $\bar{p}\,(1940\,\mathbf{MeV}/c)\,p \to K^+K^-\pi^0$. *Gezeigt sind die Zerfallswinkelverteilungen der Resonanzen aus der Anpassung B' (Tabelle 5.9) für $|m_{K^\pm\pi^0} - m| \leq \Gamma/2$. Die Meßdaten sind dargestellt als Fehlerkreuze. Die Histogramme der letzten Spalte (c, f, i) stellen die Summe der Histogramme der ersten beiden Spalten dar.*

$$
\begin{array}{llll}
\alpha_{0,0}^{^3F_3\to K_2(1430)+K}, & \alpha_{\pm1,0}^{^3F_3\to K_2(1430)+K}, & \alpha_{\pm2,0}^{^3F_3\to K_2(1430)+K}, & \alpha_{\pm2,0}^{^3D_3,^3G_3\to K_2(1430)+K}, \\
\alpha_{\pm1,0}^{^1P_1\to\phi(1020)+\pi}, & \alpha_{0,0}^{^3D_2\to\phi(1020)+\pi}, & \alpha_{\pm1,0}^{^3D_2\to\phi(1020)+\pi}, & \alpha_{\pm1,0}^{^1F_3\to\phi(1020)+\pi}, \\
\alpha_{\pm1,0}^{^1P_1\to K^*(893)+K}, & \alpha_{0,0}^{^3P_1\to K^*(893)+K}, & \alpha_{\pm1,0}^{^1D_2\to K^*(893)+K}, & \alpha_{0,0}^{^3D_2\to K^*(893)+K}, \\
\alpha_{\pm1,0}^{^1F_3\to K^*(893)+K}, & \alpha_{0,0}^{^3F_3\to K^*(893)+K}, & \alpha_{0,0}^{^1D_2\to a_2f_2(1300)+\pi}, & \alpha_{\pm1,0}^{^1D_2\to a_2f_2(1300)+\pi} \\
\text{und} & \alpha_{0,0}^{^3F_3\to a_2f_2(1700)+\pi}. & &
\end{array}
$$

Werden diese 29 partiellen Zerfallsamplituden[12] vernachlässigt, dann verringert sich die Anzahl der freien Parameter entsprechen um 58. Die Anpassung $A'(B')$ mit „reduzierter Hypothese“ hat daher nur 144 (158) statt 202 (216) freien Parametern. Die Anpassung $A'(B')$ hat einen Minimalwert der *NLL*–Funktion von $-1370,0$ ($-1385,7$). Die Differenz der Minimalwerte zwischen den Anpassungen mit $a_0f_0(1900)$ und $a_2f_2(1900)$ ist fast gleich. Die Abbildungen 5.6 bis 5.9 zeigen anhand der Produktions– und Zerfallswinkel der Resonanzen die Güte der Anpassung B, die den kleinsten Minimalwert der *NLL*–Funktion

[12]Die partiellen Zerfallsamplituden, die aus Gründen der Paritätserhaltung gleich einer anderen sind, wurden nur einmal gezählt ($\lambda = \pm1, \pm2$), sonst sind es 17 mehr.

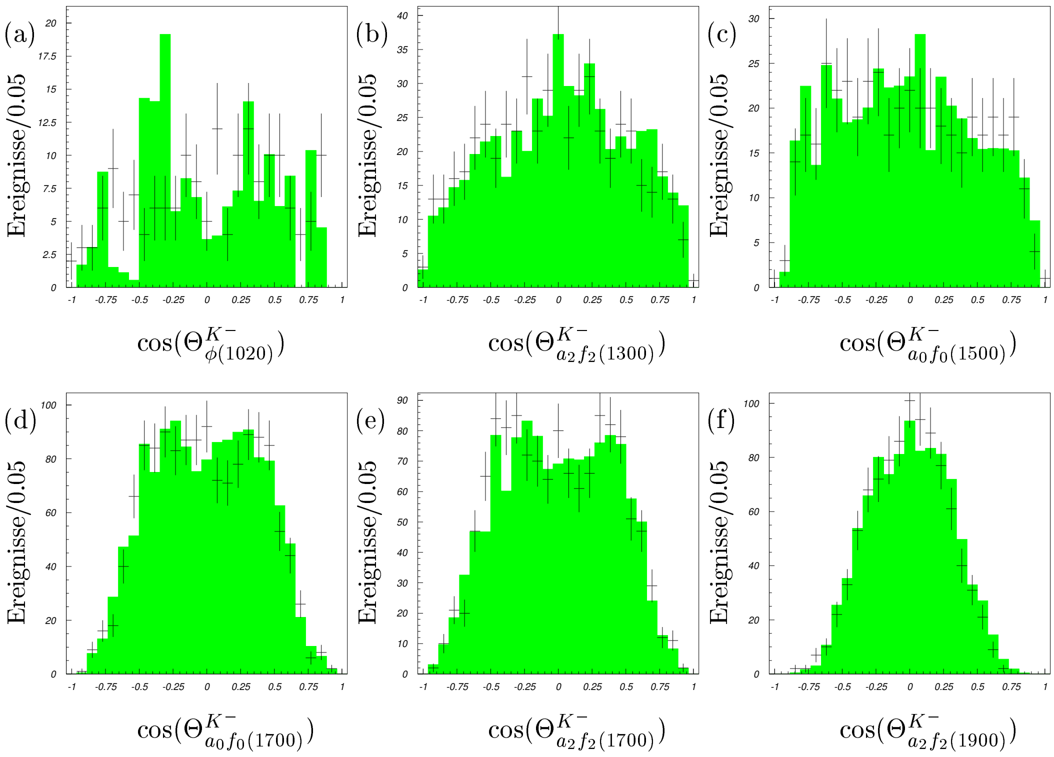

Abbildung 5.9: **Zerfallswinkel der K^+K^--Resonanzen – $\bar{p}\,(1940\,\mathbf{MeV\!/\!}c)\,p \to K^+K^-\pi^0$.**
Gezeigt sind die Zerfallswinkelverteilungen der Resonanzen aus der Anpassung B' (Tabelle 5.9) für $|m_{K^+K^-} - m| \leq \Gamma/2$. Die Meßdaten sind dargestellt als Fehlerkreuze.

hat. Die Übereinstimmung zwischen den Datenereignissen und den Ergebnissen der Anpassung ist für alle $K^\pm\pi^0$– und K^+K^-–Massenbereiche sehr gut. Die Diskrepanz zwischen Anpassung und Meßdaten für die Zerfallswinkel des $\phi(1020)$ ist auf die sehr kleine Breite des $\phi(1020)$ zurückzuführen. Die Histogramme werden automatisch von *TARA* erzeugt. Der Prozentsatz der Breite (50 %), der für den Schnitt auf die invariante Masse verwendet wird, ist für alle Resonanzen gleich. Daher besitzen die Histogramme für das $\phi(1020)$ nur sehr wenige Einträge.
Da die Güte der Anpassungen, die sich nur in den Resonanzen in der 1700 MeV/c^2–K^+K^-–Massenregion und der 1900 MeV/c^2–K^+K^-–Massenregion unterscheiden, visuell nicht unterscheidbar ist, wurden zu beiden Hypothesen (A,B) eine Reihe von Anpassungen durch-

	„volle“ Hypothese				„reduzierte“ Hypothese			
ohne Resonanz	Nr.	Δ_P	Δ_{NLL}	$\frac{\Delta_{NLL}}{\Delta_P}$	Nr.	Δ'_P	Δ'_{NLL}	$\frac{\Delta'_{NLL}}{\Delta'_P}$
$K_0(1430)$	$A1$	16	63,2	4,0	$A1'$	12	90,1	7,5
$K_2(1430)$	$A2$	46	96,5	2,1	$A2'$	18	47,1	2,6
$\phi(1020)$	$A3$	18	149,2	8,3	$A3'$	10	120,9	12,1
$a_2f_2(1300)$	$A4$	24	49,7	2,1	$A4'$	20	47,1	2,6
$a_0f_0(1500)$	$A5$	10	41,1	4,1	$A5'$	10	45,7	4,6
$a_2f_2(1700)$	$A6$	24	41,8	1,7	$A6'$	22	53,4	2,4
$a_0f_0(1700)$	$A7$	10	2,0	0,2	$A7'$	10	4,7	0,7
$a_0f_0(1900)$	$A8$	10	2,1	0,2	$A8'$	10	10,5	1,1
$a_0f_0(1700)$, $a_0f_0(1900)$	$A9$	20	27,8	1,4				
$K_0(1430)$	$B1$	16	95,8	6,0	$B1'$	12	91,2	7,6
$K_2(1430)$	$B2$	46	93,0	2,0	$B2'$	18	62,2	3,5
$\phi(1020)$	$B3$	18	138,7	7,7	$B3'$	10	116,6	11,7
$a_2f_2(1300)$	$B4$	24	34,4	1,4	$B4'$	20	42,6	2,1
$a_0f_0(1500)$	$B5$	10	35,8	3,6	$B5'$	10	42,8	4,3
$a_2f_2(1700)$	$B6$	24	21,0	0,9	$B6'$	22	19,9	0,9
$a_0f_0(1700)$	$B7$	10	5,3	0,5	$B7'$	10	5,6	0,6
$a_2f_2(1900)$	$B8$	24	28,2	1,2	$B8'$	24	16,8	0,7
$a_0f_0(1700)$, $a_2f_2(1900)$	$B9$	34	45,5	1,3				

Tabelle 5.9: **Signifikanz der Resonanzen** – $\bar{p}\,(1940\,\mathbf{MeV/}c)\,p \to K^+K^-\pi^0$.
Die Tabelle gibt die Verschlechterung des Minimums der NLL–Funktion an (Differenz der Minima Δ_{NLL} ist positiv), wenn die Resonanzen der ersten Spalte von den Hypothesen ausgeschlossen werden. Δ_P gibt die Anzahl der freien Parameter an, die durch Fortlassen der Resonanzen eingespart werden. Die Anpassungen wurden für $J_{max} = 3$ durchgeführt und enthielten außer den acht Resonanzen der ersten Spalte noch das $K^*(893)$. Für die Anpassungen der Gruppe A wurde anstelle eines $a_2f_2(1900)$ in der Gruppe B ein $a_0f_0(1900)$ einbezogen. In den Anpassungen zu den „reduzierten“ Hypothesen (A', B') wurden 29 partielle Zerfallsamplituden vernachlässigt.
Werden alle neun Resonanzen einbezogen, dann hat das Minimum der NLL–Funktion im Fall A (B) den Wert $-1457,8$ ($-1475,5$) bei 202 (216) freien Parametern und für die „reduzierte“ Hypothese A' (B') den Wert $-1370,0$ ($-1385,7$) bei 144 (158) freien Parametern.

geführt, um die Signifikanz der einzelnen Resonanzen zu überprüfen. Diese Anpassungen sind in vier Gruppen in Tabelle 5.9 zusammengefaßt. Sowohl für die vollen Hypothesen (A,B) als auch für die um 29 partielle Zerfallsamplituden reduzierten Hypothesen (A',B') sind acht Anpassungen vorgenommen worden, bei denen jeweils eine der insgesamt neun Resonanzen[13] aus der entsprechenden Hypothese herausgenommen wurde. Tabelle 5.9 listet die Anzahl Δ_P der Parameter, die durch Fortlassen der jeweiligen Resonanz eingespart werden, und die Änderungen Δ_{NLL} der Minima der *NLL*–Funktion auf. Letztere sind in jedem Fall positiv, da die Anpassungen etwas schlechter als die Anpassungen mit allen neun Resonanzen sind. Die größte Verschlechterung (abgesehen vom $K^*(893)$) tritt erwartungsgemäß auf, wenn das $\phi(1020)$ nicht berücksichtigt wird. Die Differenz Δ_{NLL} ist in jedem Fall über einhundert. Bezogen auf die Differenz Δ_P der Parameter ergibt sich in jedem Fall eine Änderung pro Parameter größer als sieben. Das $\phi(1020)$ hat die höchste Signifikanz, da die schmale Spitze in der invarianten K^+K^-–Masse von keiner anderen Resonanz oder durch Interferenzen mehrerer Resonanzen erzeugt werden kann. Im Vergleich der „bekannten" Resonanzen $K_0(1430)$, $K_2(1430)$, $\phi(1020)$, $a_2f_2(1300)$ und $a_0f_0(1500)$ (Anpassungen $A1$ – $A5$, $A1'$ – $A5'$, $B1$ – $B5$ und $B1'$ – $B5'$) hat das $a_2f_2(1300)$ die niedrigste Signifikanz. Die Änderung des Minimums der *NLL*–Funktion ist etwa zwei pro Parameter, im Fall $B4$ sogar nur $1,4$ pro Parameter. Wird der letzte Wert als Maßstab für die Resonanzen in der 1700 MeV/c^2–K^+K^-–Massenregion und der 1900 MeV/c^2–K^+K^-–Massenregion genommen, dann kann das $a_2f_2(1700)$ (Anpassungen $A6$,$A6'$, $B6$ und $B6'$) im Vergleich zu den anderen Resonanzen gerade noch als signifikant angenommen werden. Lediglich für die Anpassungen der Gruppen B und B' mit einem $a_2f_2(1900)$ ist die Änderung bei Fortlassen des $a_2f_2(1700)$ mit $0,9$ klein. Offensichtlich wird ein Teil dieser Intensität durch

[13] Das $K^*(893)$ ist für die Konvergenz der Minimierung unerläßlich und ist daher in alle Anpassungen einbezogen worden.

Resonanz	Masse $m \pm \sigma_{m_{\text{stat}}} \pm \sigma_{m_{\text{sys}}}$ [MeV/c^2]	Breite $\Gamma \pm \sigma_{\Gamma_{\text{stat}}} \pm \sigma_{\Gamma_{\text{sys}}}$ [MeV/c^2]
$K^*(893)$	$894 \pm 3 \pm 1$	$64 \pm 9 \pm 2$
$K_0(1430)$	$1432 \pm 15 \pm 7$	$312 \pm 30 \pm 18$
$K_2(1430)$	$1432 \pm 9 \pm 8$	$141 \pm 19 \pm 24$
$\phi(1020)$	$1016 \pm 2 \pm 1$	$41 \pm 8 \pm 3$
$a_2f_2(1300)$	$1306 \pm 21 \pm 13$	$191 \pm 60 \pm 9$
$a_0f_0(1500)$	$1502 \pm 12 \pm 5$	$92 \pm 42 \pm 18$
$a_2f_2(1700)$	$1670 \pm 21 \pm 9$	$258 \pm 60 \pm 28$
$a_0f_0(1700)$	$1722 \pm 42 \pm 25$	$227 \pm 108 \pm 104$
$a_2f_2(1900)\dagger$	$1913 \pm 22 \pm 12$	$233 \pm 61 \pm 54$
$a_0f_0(1900)\dagger$	$1923 \pm 36 \pm 22$	$227 \pm 120 \pm 58$

Tabelle 5.10: **Massen und Breiten der Resonanzen** – $\bar{p}\,(1940\,\mathbf{MeV/}c)\,p \to K^+K^-\pi^0$
Die systematischen Fehler wurden aus den Variationen der Werte bezüglich Anpassungen zu unterschiedlichen Hypothesen ermittelt. Die statistischen Fehler sind mit einem Faktor Drei skaliert, da sie lediglich aus einer parabolischen Näherung der NLL–Funktion in der Nähe des Minimums bestimmt wurden.
† *Es wurde entweder $a_2f_2(1900)$ oder $a_0f_0(1900)$ angepaßt.*

das $a_2f_2(1900)$ beschrieben. Ein $a_0f_0(1700)$ (Anpassungen $A7$,$A7'$, $B7$ und $B7'$) wird zur Beschreibung der Daten nicht benötigt, da die Änderungen nur um $0,5$ pro Parameter liegen[14]. Ähnlich verhält es sich mit der Resonanz zur Beschreibung der $1900\,\mathrm{MeV\!/}c^2$–K^+K^-–Massenregion. Zwar wird ein $a_2f_2(1900)$ gegenüber einem $a_0f_0(1900)$ bevorzugt, dennoch liegt die Vermutung nahe, daß mit einer schweren Resonanz bei $1,9\,\mathrm{GeV\!/}c^2$ eher der verbleibende Untergrund aus dem $\pi^+\pi^-\pi^0$–Endzustand beschrieben wird, der in derselben Region des Dalitzplots zu finden ist (vgl. Abbildung 3.11 mit den Dalitzplots in Abbildung 5.10). Diese Hypothese wird unterstützt von der Tatsache, daß die Änderung

[14]Im Idealfall entspricht eine Änderung des Minimums der *NLL*–Funktion um $0,5$ pro Parameter einer Standardabweichung.

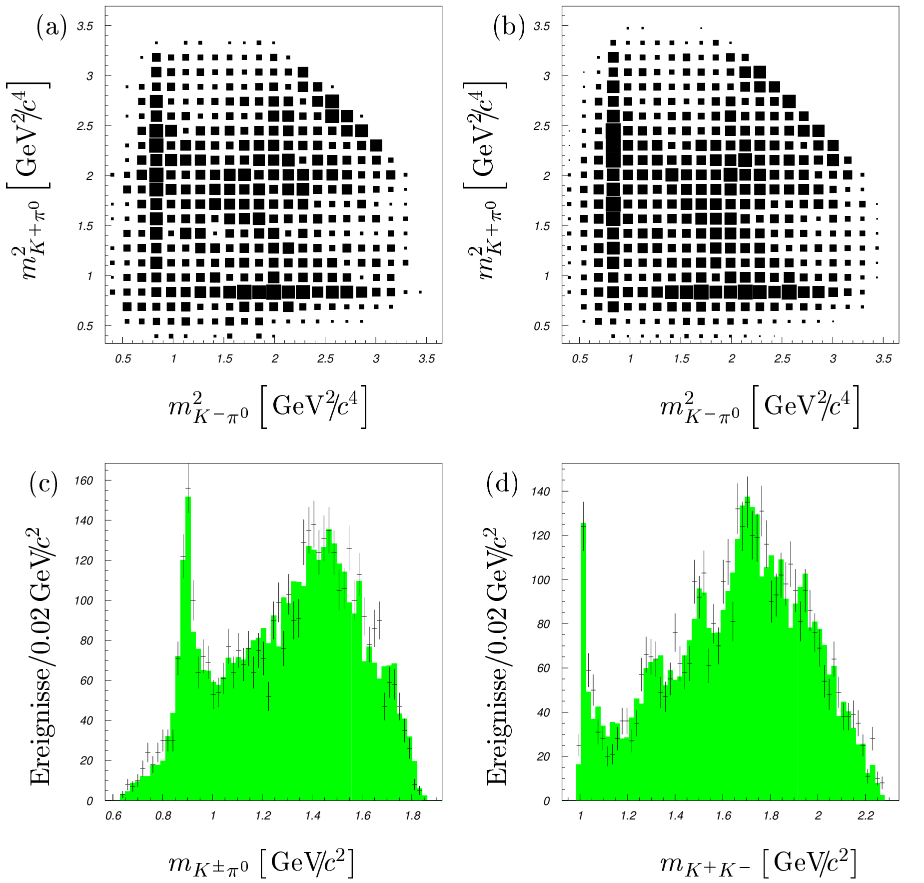

Abbildung 5.10: **Dalitzplot (nicht symmetrisiert) und invariante Massen der Anpassung – $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV\!/}c)\,p \to K^+K^-\pi^0$.**
(a) Dalitzplot der Anpassung B7 (ohne $a_0f_0(1700)$).
(b) Dalitzplot der Datenereignissse.
(c) $K^\pm\pi^0$-invariante Masse.
(d) K^+K^--invariante Masse.
In den Spektren (c) und (d) sind die Meßdaten dargestellt als Fehlerkreuze.

pro Parameter bei Fortlassen des $a_2f_2(1700)$ in Anpassung $A6$ größer ist als in den Anpassungen $A9$ und $B9$ ist, bei denen sowohl das $a_0f_0(1700)$ und entweder das $a_0f_0(1900)$ oder das $a_2f_2(1900)$ von der Hypothese ausgenommen wurden. In Tabelle 5.10 sind die Massen und Breiten der Resonanzen zusammengefaßt. Die systematischen Fehler sind aus der Variation der Werte für Massen und Breiten über alle Anpassungen gewonnen worden. Der systematische Fehler ist für die Resonanzen $a_0f_0(1700)$, $a_0f_0(1900)$ und $a_2f_2(1900)$ am größten. Auch der statistische Fehler ist für diese Resonanzen besonders hoch. Die Massen und Breiten der $K^{\pm}\pi^0$–Resonanzen stimmen sehr gut mit den genaueren Werten in [44] überein. Gleiches gilt für die Masse des $\phi(1020)$–Mesons. Die vergleichsweise große Breite des $\phi(1020)$ spiegelt die experimentelle Auflösung wieder, die nicht mit den hier angegebenen Fehlern, die sich auf die freien Parameter der Anpassung beziehen, verwechselt werden darf. Das $a_2f_2(1300)$ besitzt fast die Masse des $a_2(1320)$ aber eher die Breite des $f_2(1270)$. Dies ist ein deutlicher Hinweis, daß tatsächlich beide Resonanzen zum Endzustand beitragen. Ebenso hat das hier benötigte $a_0f_0(1500)$ eine relativ kleine Breite, was neben den $f_0(1500)$ (oder $a_0(1450)$) auf die Anwesenheit eines schmaleren $f_2'(1525)$ hindeutet. Eine gute Beschreibung der Reaktion $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV}/c)\,p \to K^+K^-\pi^0$ wird, wie ein Vergleich der Dalitzplots und der invarianten Massen in Abbildung 5.10 zeigt, erreicht, wenn die Resonanzen $K^*(893)$, $K_0(1430)$, $K_2(1430)$, $\phi(1020)$, $a_2f_2(1300)$, $a_0f_0(1500)$, $a_2f_2(1700)$ und $a_2f_2(1900)$ angepasst werden.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Diskussion

Im Zeitraum zwischen Herbst 1989 und Ende 1996 wurden mit dem *Crystal Barrel* Detektor am *LEAR* (des *CERN*) mehrere hundert Millionen Ereignisse der Antiproton–Proton–Annihilation in Wasserstoff und Deuterium aufgenommen. Die Analyse dieser an Quarks und Gluonen reichen Reaktion soll bestehende Lücken im bekannten Mesonenspektrum füllen und Aufschlüsse im Bereich der nicht–perturbativen QCD liefern. Zur vollständigen Rekonstruktion der verschiedenen Zerfallskanäle ist es notwendig, jedes langlebige Teilchen im Endzustand der Reaktion eindeutig nachzuweisen. Dies wurde durch die 4π–Geometrie des Detektorsystems, sowie die Kombination von Spurdetektoren und einem Kristallkalorimeter ermöglicht.
Die Rekonstruktion, die Selektion und die Analyse von drei verschiedenen Endzuständen der Antiproton–Proton Annihilation werden vorgestellt.
Um das Partialwellen–Analyseprogramm *TARA* zu testen, wurde die Reaktion $\bar{p}\,(600\,\mathrm{MeV}/c)\,p \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$ reanalysiert. Auch die erneute Analyse bestätigt die Existenz des *Glueball*–Kandidaten $f_0(1500)$ in der Annihilation im Fluge. Der in der früheren Analyse entdeckte isoskalare Tensor $f_2(1640)$ wird im Rahmen der geringen Test–Statistik ebenfalls bestätigt.
Mit der Reanalyse der Reaktion $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV}/c)\,p \rightarrow \eta\eta\pi^0$ gelang zum ersten Mal die vollständige Beschreibung der Annihilation im Fluge beim höchsten vom *LEAR*–Beschleuniger zur Verfügung gestellten Strahlimpuls. Neben den bekannten Isovektoren $a_0(980)$, $a_2(1320)$ und den bekannten Isoskalaren $f_2(1270)$, $f_0(1370)$ und $f_0(1500)$ ist der in der Erstanalyse gefundene Isovektor $a_2(1650)$ mit einer Masse von $1683 \pm 33 \pm 14\,\mathrm{MeV}/c^2$ und einer Breite von $304 \pm 62 \pm 31\,\mathrm{MeV}/c^2$ bestätigt worden. Der vereinfachte Ansatz der früheren Analyse berücksichtigte nur die Informationen aus den Zerfallswinkeln der Resonanzen. Erst durch die Berücksichtigung der vollen Information, also auch der Produktionswinkel der Resonanzen, konnten in der hier vorgestellten Analyse die resonanten Strukturen bei großen invarianten $\eta\eta$–Massen erklärt werden. Die frühere Analyse benötigte nur einen schweren Isoskalar, dessen Spin nicht eindeutig auf Null oder Zwei festgelegt werden konnte. Die hier vorgestellte Analyse zeigt, daß nicht nur eine Resonanz, sondern zwei Resonanzen für diese Strukturen verantwortlich sind. Ein schwerer Skalar $f_0(2150)$ mit einer Masse von $2159 \pm 36 \pm 40\,\mathrm{MeV}/c^2$ und einer Breite von $203 \pm 57 \pm 59\,\mathrm{MeV}/c^2$, sowie ein neuer Tensor mit einer Masse von $1982 \pm 43 \pm 7\,\mathrm{MeV}/c^2$ und einer großen Breite von $458 \pm 65 \pm 30\,\mathrm{MeV}/c^2$.

Die Reaktion $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV}/c)\,p \rightarrow K^+K^-\pi^0$ ist erstmalig in dieser Arbeit vorgestellt und analysiert worden. Im Gegensatz zu den anderen beiden Endzuständen, kann in dieser Reaktion der Isospin der $K\bar{K}$-Resonanzen nicht bestimmt werden. Die beste Anpassung bezog die bekannten Resonanzen $K^*(893)$, $K_0(1430)$, $K_2(1430)$ und $\phi(1020)$ ein. Des-

weiteren wird ein $a_2f_2(1300)$ benötigt, das sowohl das $f_2(1270)$ als auch das $a_2(1320)$ beinhaltet. Für die Beschreibung der 1500 MeV/c^2–K^+K^-–Massenregion wird Spin Null bevorzugt, was auf den *Glueball*–Kandidaten $f_0(1500)$ und/oder das $a_0(1450)$ hindeutet. Ein Beitrag des $f_2'(1525)$ kann allerdings nicht ausgeschlossen werden. Im Bereich invarianter K^+K^-–Massen von 1700 MeV/c^2 wurde ein neuer Tensor $a_2f_2(1700)$ mit einer Masse von $1670\pm21\pm9$ MeV/c^2 und einer Breite von $258\pm60\pm28$ MeV/c^2 gefunden. Oberhalb einer invarianten K^+K^-–Masse von 1700 MeV/c^2 konnte keine weitere Resonanz eindeutig nachgewiesen werden. Eine schwere K^+K^-–Resonanz mit einer Masse von über 1900 MeV/c^2 verbessert die Anpassung ein wenig. Diese resonante Struktur wird jedoch höchstwahrscheinlich durch Untergrund–Ereignisse vom $\pi^+\pi^-\pi^0$–Endzustand hervorgerufen, die bei der Annihilation im Fluge nicht perfekt abgetrennt werden können. Im Rahmen der geringen Statistik wird eine weitere Resonanz um 1700 MeV/c^2 ausgeschlossen. Insbesondere ein $a_0f_0(1700)$ beziehungsweise ein $f_J(1700)$, wie es in radiativen J/ψ–Zerfällen gesehen wurde, konnten nicht in den Daten etabliert werden.
Da der Isospin des $a_2f_2(1700)$ in der Reaktion $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV}/c)\,p \rightarrow K^+K^-\pi^0$ nicht bestimmt werden kann, ist eine Interpretation bzw. Einordnung in das Mesonenspektrum schwierig. Die Ähnlichkeit von Massen und Breiten des $a_2f_2(1700)$ mit denen des im $\eta\eta\pi^0$–Endzustand gefundenen $a_2(1650)$, legt nahe, daß es sich um dieselbe Resonanz handelt.

Die Ergebnisse dieser Arbeit wurden erzielt mit einem in der Konzeption vollkommen neuen, objektorientierten Programm. Das Programm *TARA* erlaubt in einfacher Weise die Partialwellenanalyse sequentieller Zweikörperzerfälle, die in nachgewiesenen Vielkörper–Endzuständen enden. Die wesentlichen Eigenschaften des Programms sind: Berücksichtigung aller Observablen einer Reaktion, Generierung der Amplituden zur Laufzeit, beliebiger Spin der Anfangszustände, der Resonanzen und Endzustände, Zerfälle mit und ohne Paritätserhaltung, beliebige Dynamik im Zerfall, LaTeX-Dokumentation einer jeden Funktion, die berechnet wird, Definition von Strategien zur Minimierung der *Likelihood*–Funktion, Dokumentation aller Parameter einer Anpassung und die Visualisierung der Ergebnisse. *TARA* ermöglicht es, ohne Programmierkenntnisse fast jeden Endzustand, der mit dem *Crystal Barrel* Detektor oder ähnlichen Experimenten gemessen wurde, zu analysieren.

Anhang A

TARA – das Analyseprogram

Primäres Ziel zu Beginn der Entwicklung des Analyseprogramms *TARA* war es, Antiproton–Proton Annihilationen im Fluge mit beliebig vielen Teilchen (mindestens fünf) im Endzustand, unter vollständiger Berücksichtigung der Produktion und des Zerfalls des $\bar{p}p$–Systems, analysieren zu können. Schon bald zeichnete sich dabei ab, daß der übliche, rein prozedurale Ansatz, bei dem jede Teilamplitude für sich fest einprogrammmiert ist, zu einer unüberschaubaren Anzahl von Funktionen führt, die alle auf Fehler untersucht werden müßten. Allein die fehlerfreie Berechnung und anschließende Programmierung einer Zerfallsamplitude, zum Beispiel für Spin $4 \to 2+1$, ist selbst mit Hilfe eines Werkzeuges wie *Mathematica* [60] sehr mühsam. Die Lösung, die *TARA* anbietet, besteht darin, die Amplituden erst zur Laufzeit **symbolisch**, das heißt durch reine Ganzzahl–Arithmetik, zu generieren und umzuformen. Erst dadurch wird es möglich die Laufzeit des Programms, trotz seiner Allgemeinheit, problemgerecht zu optimieren. Zudem werden Rundungsfehler durch Ganzzahl–Arithmetik ausgeschlossen, und vereinfachende Annahmen, zum Beispiel ein maximaler Bahndrehimpuls $L_{\max}$ für einen Zerfall, können direkt in der Gesamtamplitude berücksichtigt werden. Außerdem werden alle Schritte, die das Programm ausführt, umfassend dokumentiert. Selbst Dritte, die nicht am Gang einer Analyse beteiligt waren, werden anhand der Ausgaben des Programms ausführlich über die Ergebnisse und wie diese erreicht wurden informiert.

A.1 Benutzereingaben

Dieser Abschnitt gibt, anhand der vom Benutzer zu tätigenden Eingaben, eine Übersicht über die Möglichkeiten, die sich mit *TARA* eröffnen. Um eine Anpassung durchzuführen müssen zwei Dateien vom Benutzer erstellt werden:

- Die *Steuerungsdatei* – enthält die Beschreibung der Anpassung – die Hypothese.
- Die *Strategiedatei* – legt fest wie das Programm zur Minimierung der *NLL*–Funktion vorgehen soll.

Gegebenenfalls müssen zwei weitere Dateien vom Benutzer editiert werden:

- Die *Teilchentabelle* – zur Definition eines neuen Zustandes (Teilchen bzw. Resonanz). Diese Datei kann für alle Anpassungen verwendet werden.
- Die *Standard–Parameterdatei* – um die Eigenschaften von Parametern zu verändern (z.B. einen Startwert). Diese Datei wird für jede Anpassung von *TARA* neu erzeugt.

A.1.1 Teilchendefinitionen – *Teilchentabelle*

Jeder Zustand wird identifiziert durch ein eindeutiges Schlüsselwort, das in einer externen *Teilchentabelle* in *ASCII* Format gespeichert ist (Standard–Dateiname: *particles.table*). Diese Tabelle enthält die zur Zeit besten Werte für Massen und Breiten der Teilchen, wie sie in [44] zu finden sind. Die Tabelle ist in Blöcke unterteilt, die der Einteilung der Übersichtstabellen von [44] folgt, um die Definition der Quantenzahlen zu vereinfachen, und um eine Überprüfung derselben zur Laufzeit zu ermöglichen. Die *Teilchentabelle* hat (in Auszügen) die in Tabelle A.1 gezeigte Gestalt.

Mesons{								
	LightUnflavored{							
		Isospin–0{						
#Schlüsselwort	ID	TeX-Name	J	P	C	G	Masse	Breite
eta	*1*	\eta	*0*	*-1*	*1*	*1*	*0.547*	*0.0001*
...								
f2(1980)	*44*	f_2(1980)	*2*	*1*	*1*	*1*	*1.980*	*0.4000*
		}						
		Isospin–1{						
#Schlüsselwort	ID	TeX-Name	J	P	C	G	Masse	Breite
pion	*1*	\pi	*0*	*-1*	*1*	*-1*	*0.134*	*0.0001*
rho	*2*	\rho	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*0.769*	*0.151*
...								
a2(1650)	*21*	*a_2(1650)*	*2*	*1*	*1*	*-1*	*1.650*	*0.200*
		}						
	}							
	Strange{							
#Schlüsselwort	ID	TeX-Name	J	P			Mass	Breite
K	*1*	K	*0*	*-1*			*0.493*	*0.0001*
...								
K(1830)	*15*	K(1830)	*0*	*-1*			*1.830*	*0.250*
	}							
}								

Tabelle A.1: **Teilchentabelle.**
Standard–Dateiname: particles.table. Neue Zustände werden für TARA verfügbar, wenn sie im entsprechenden Block dieser Tabelle hinzugefügt werden. Dabei ist zu beachten, daß das Schlüsselwort eindeutig ist in der gesamten Tabelle, und daß die zugehörige Teilchennummer (ID) eindeutig ist im jeweiligen Block. Kommentarzeilen beginnen, wie in allen Steuerungs-Dateien für Tara mit einem Doppelkreuz (#). Die aktuell verwendete Tabelle kann auf Wunsch zur Laufzeit ausgegeben werden.

A.1.2 Hypothese – *Steuerungsdatei*

Die Hypothese der Anpassung muß vom Benutzer in einer gesonderten Datei, der *Steuerungsdatei*, festgelegt werden. Der Name der *Steuerungsdatei* muß folgende Form haben:

```
Particles 3 { eta 0 0.54745 pion 0 0.1395679 eta 0 0.54745 }
Resonances 8 {
  a2(1320) eta pion bw-q02-q2-barrier   f0(1500) eta eta bw-q02-q2-barrier
  a0(980)  eta pion bw-q02-q2-barrier   f2(1980) eta eta bw-q02-q2-barrier
  a2(1650) eta pion bw-q02-q2-barrier   f2(2150) eta eta bw-q02-q2-barrier
  f0(2150) eta pion bw-q02-q2-barrier   f0(1370) eta eta bw-q02-q2-barrier
}
Channels 8 {
  a2(1320) eta f0(1500) pion a0(980)  eta  f2(1980) pion
  a2(1650) eta f0(2150) pion f2(1270) pion f2(1370) pion
}
InitialState properStates {
  Beams { Projectile antiproton 0.9382731 0.6 gev
          Target     proton     0.9382731 0   gev
} }
Datasamples eep {
  RealData   3789 1000 /fit/ep0e.data mev ascii xyz-momentum-energy
  MonteCarlo 9321 5000 /fit/ep0e.mc   mev ascii xyz-momentum-energy
}
Paths { LoadSave /fit/eep/save Histograms /fit/eep/paw
        Minimizer /fit/eep/mini
}
Assumptions { InitialState { maxJ 4 }
  Decays 7 {
    ppbar(1S0),f0(2150),pion { cancel }  ppbar(1D2),f2(1980),pion { cancel }
    ppbar(1G4),a2(1650),eta { cancel }   ppbar(1G4),f0(2150),pion { cancel }
    ppbar(1G4),f2(1980),pion { cancel }  ppbar(3F3),f2(1980),pion { cancel }
    ppbar(3F4,3H4),f2(1980),pion { cancel }
  }
  Alphas { Zeros 5 {
    alpha-ll(ppbar(1D2),f2(1270),pion,1,0)  alpha-ll(ppbar(1G4),a2(1320),eta,0,0)
    alpha-ll(ppbar(3P1),f2(1270),pion,0,0)  alpha-ll(ppbar(3F3),f2(1270),pion,2,0)
    alpha-ll(ppbar(3F4,3H4),a2(1320),eta,1,0)
} }
```

Tabelle A.2: *Steuerungsdatei* – $\bar{p}\,(1940\,\mathbf{MeV/}c)\,p \to \eta\eta\pi^0$.
Mit dieser Steuerungsdatei wurde die Anpassung F aus Tabelle 5.4 vorgenommen. Ein gültiger Name für diese Datei ist z.B.: eep0.5.steer.

Name der *Steuerungsdatei*: *fit–name.fit–num.*`steer`

Die Anpassung wird beim Programmstart anhand des vom Benutzer definierten Namens *fit–name*, der Nummer *fit–num* und der Endung `steer`[1] von *TARA* identifiziert. Die *Steuerungsdatei* wird in derselben Kommandosprache wie die *Teilchentabelle* verfaßt, die sehr einfach zu verstehen ist. Die Beschreibung der Anpassung F aus Tabelle 5.4 zur Analyse der Reaktion $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV/}c)\,p \to \eta\eta\pi^0$ ist in Tabelle A.2 gezeigt. Die *Steuerungsdatei* gliedert sich in mehrere Blöcke, die mit einem Schlüsselwort und einer geschweiften Klam-

[1] Die Endung des Dateinamens „.steer“ ist das englische Verb *to steer* – steuern.

mer ({) beginnen und mit einer geschweiften Klammer (}) enden. Auf der obersten Ebene müssen folgende Blöcke definiert werden: *Particles*, *Channels*, *InitialState*, *Assumptions*, *DataSamples* und *Paths*. Hinzu kommen noch optional: *Stable2Body*, *Stable3Body*, *Fix2toResonance*, *Fix3toResonance* und *Resonances*. Diese Grundbausteine werden im folgenden mit allen möglichen Optionen beschrieben.

A.1.2.1 Endzustand

Zur Beschreibung des Endzustandes, das heißt der stabilen Teilchen ohne Breite im Sinne der Anpassung, stehen drei Blöcke zur Verfügung. Obligatorisch ist der *Particle*–Block (Tabelle A.3) in dem die Vierervektoren der gemessenen Teilchen definiert werden. Für

Allgemein			Beispiel		
Particles n {			**Particles** *5* {		
#Name	Ladung	Masse	#Name	Ladung	Masse
name$_0$	c_0	m_0	pion	*1*	*0.1395679*
			pion	*-1*	*0.1395679*
...			pion	*0*	*0.134976*
			pion	*0*	*0.134976*
name$_{n-1}$	c_{n-1}	m_{n-1}	photon	*0*	*0*
}			}		

Tabelle A.3: *Particle*–**Block.**
In dem Beispiel sind die gemessenen Vierervektoren Nr. 0 bis 3 Pionen, und der Vierervektor Nr.4 ist ein Photon. Der zu untersuchende Endzustand ist also: $\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0\gamma$.

jeden Vierervektor, also für jedes gemessene Teilchen im Endzustand, muß der Name (Schlüsselwort aus der *Teilchentabelle*), die Ladung und die exakte bei der Rekonstruktion verwendete Masse angegeben werden. Die Ladung der Teilchen wird benötigt, da die *Teilchentabelle* die Teilchen nicht nach der Ladung aufschlüsselt. Die exakte Masse muß angegeben werden, da ansonsten undefinierte Ausdrücke, zum Beispiel Wurzeln aus negativen Zahlen, bei der Berechnung der Winkel oder der Aufbruchimpulse auftreten könnten. Die maximale Anzahl von Vierervektoren ist $n_{\max} = n = 32$. Zwei oder drei Vierervektoren können mit Hilfe der optionalen Blöcke *Stable2Body* und *Stable3Body* (Tabelle A.4) zu stabilen Teilchen zusammengefaßt werden. Dies ist dann sinnvoll, wenn die Zerfallsprodukte besonders schmaler Resonanzen eindeutig identifiziert werden können und die experimentelle Auflösung für die invariante Masse der Zerfallsprodukte größer ist als die Breite der Resonanzen. Für Messungen mit dem Crystal Barrel Detektor trifft dies zum Beispiel auf die Zerfälle des neutralen Pions ($\pi^0 \to \gamma\gamma$), des η–Mesons ($\eta \to \gamma\gamma, \pi\pi\pi$), des η'–Mesons ($\eta' \to \gamma\gamma, \pi\pi\eta$) und des ω–Mesons ($\omega \to \pi^0\gamma, \pi^+\pi^-\pi^0$), zu.
In den entsprechenden Blöcken (Tab. A.4) brauchen nur die Nummern der Vierervektoren angegeben werden, die ersetzt werden sollen. Diese Vierervektoren (Teilchen) stehen dann der Kombinatorik von Resonanzen (Tab. A.5) und Kanälen (Tab. A.9) nicht mehr zur Verfügung. An ihre Stelle tritt das auf diese Weise definierte (quasi–) stabile Teilchen.

A.1.2.2 Resonanzen

Da *TARA* ein Programm für sequentielle Zweikörperzerfälle nach dem Isobar-Modell ist, dürfen Resonanzen nur in zwei Teilchen zerfallen. Eine Resonanz wird durch den Namen

Allgemein					Beispiel			
Stable2Body	*s*	{			**Stable2Body**	*1*	{	
#Name	Vierervektoren				#Name	Vierervektoren		
name_0	$Nr._{0,0}$	$Nr._{0,1}$						
...					omega	*3*	*4*	
name_{s-1}	$Nr._{s-1,0}$	$Nr._{s-1,1}$						
}					}			
Stable3Body	*t*	{			**Stable3Body**	*1*	{	
#Name	Vierervektoren				#Name	Vierervektoren		
name_0	$Nr._{0,0}$	$Nr._{0,1}$	$Nr._{0,2}$					
...					omega	*0*	*1*	*2*
name_{t-1}	$Nr._{t-1,0}$	$Nr._{t-1,1}$	$Nr._{t-1,2}$					
}					}			

Tabelle A.4: *Stable2Body*–**Block und** *Stable3Body*–**Block.**
Beide Blöcke sind optional. Das Beispiel bezieht sich auf den Particle–Block in Tabelle A.3. Der Stable2Body–Block ersetzt das letzte Pion (π^0, Nr.3) und das Photon durch ein ω. Der zu untersuchende Endzustand ist dann: $\pi^+\pi^-\pi^0\omega$. Wird auch noch der Stable3Body–Block definiert, dann wird der Zweikörper–Endzustand $\omega\omega$ analysiert.

der Resonanz und durch die Namen der Zerfallsprodukte in der *Steuerungsdatei* definiert. Jeder der drei Namen muß in der *Teilchentabelle*definiert sein. Die Zerfallsprodukte dürfen Teilchen aus dem *Particle*–Block, dem *Stable2Body*–Block, dem *Stable3Body*–Block oder eine zuvor definierte Resonanz sein. Bei Zerfallsprodukten aus dem *Particle*–Block ist darauf zu achten, daß diese nicht in den optionalen Blöcken für stabile Teilchen (*Stable2Body*, *Stable3Body*) durch andere Teilchen ersetzt wurden. Zerfallsketten ($f \to \rho+\pi \to (\pi\pi)+\pi$)

Allgemein			
Resonances *r* {			
#Name	Zerfallsprodukte		Dynamik
name_0	$\text{name}_{0,0}$	$\text{name}_{0,1}$	$\mathbf{dyn}_0$
		...	
name_{r-1}	$\text{name}_{r-1,0}$	$\text{name}_{r-1,1}$	$\mathbf{dyn}_{r-1}$
}			

Beispiel			
Resonances *3* {			
rho	pion	pion	**bw-q02-q2-barrier**
f0(1500)	rho	rho	**bw-no-barrier**
a2(1320)	rho	pion	**bw-q0-q-barrier**
}			

Tabelle A.5: *Resonances*–**Block.**
Das Beispiel bezieht sich auf einen zuvor im Particle–Block definierten $\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0\pi^0$ Endzustand. Der Definition des $\rho \to \pi\pi$ folgen die Definitionen der Zerfallsketten $f_0 \to \rho\rho \to 4\pi$ und $a_2 \to \rho\pi \to 3\pi$.

Schlüsselwort	Gleichung für Δ
no-dynamic	$\Delta \equiv 1$
bw-no-barrier	(C.66)
bw-q-barrier	(C.67)
bw-q0-q-barrier	(C.69)
bw-q02-q2-barrier	(C.68)
bw-q0-q-phase	(C.70)
bw-q02-q2-phase	(C.71)

Tabelle A.6: **„Dynamik"–Schlüsselwörter.**
Mit diesen Schlüsselwörtern wird die gewünschte Parametrisierung der Energieabhängigkeit der partiellen Zerfallsamplituden ausgewählt.

werden demnach realisiert, in dem als Zerfallsprodukt einer Resonanz (f) eine zuvor deklarierte Resonanz (ρ) verwendet wird. Die gesamte zu einer Resonanz gehörige Kombinatorik und die Ladung jeder einzelnen Kombination wird automatisch erzeugt. Resonanzen, die in zwei (oder mehrere) unterschiedliche Paare von Teilchen zerfallen, können nur durch die Definition einer zusätzlichen Hilfs–Resonanz realisiert werden, da Multikanal–K–Matrizen (4.109) oder P–Vektoren (4.114,4.115) noch nicht unterstützt werden. Die Syntax für die Definition von Resonanzen ist in Tabelle A.5 angegeben. Die genaue Form der dynamischen Funktion (Breit–Wigner–Form) wird durch ein Dynamik–Schlüsselwort ausgewählt. Tabelle A.6 zeigt die zur Zeit in *TARA* implementierte Auswahl. So kann z.B. auch gar keine dynamische Funktion ($\Delta \equiv 1$) verwendet werden. Wenn die Zerfallsprodukte einer Resonanz, wie in dem bereits oben angeführten Beispiel $\omega \to \pi^0\gamma$, eindeutig identifiziert werden können (z.B. durch eine kinematische Anpassung), dann können durch einen *Fix2toResonance*–Block diese beiden Teilchen von der Kombinatorik aller anderen Resonanzen ausgeschlossen werden.
Die Syntax ist analog zum *Stable2Body*–Block. Der Vorteil einer Definition im *Fix2to-Resonance*–Block (der Zustand zerfällt) gegenüber einer Definition im *Stable2Body*–Block (der Zustand ist stabil), besteht darin, daß eine Linienform mit angepaßt werden kann. Außerdem geht die Information aus den Zerfallswinkeln mit in die Anpassung ein, da zwei zusätzliche Observable zur Verfügung stehen[2]. Es gibt noch eine weitere Möglichkeit die Kombinatorik der Resonanzen einzuschränken. Wenn eine Resonanz nur über eine

[2]Es sei denn, es handelt sich um den Zerfall eines Spin–0–Teilchens in zwei Spin–0–Teilchen, da in diesem Fall die D–Funktion ($D^0_{0,0} \equiv 1$) zu keiner Winkelabhängigkeit führt.

Allgemein			
Fix2toResonance r {			
#Name	Viererverktoren		Dynamik
name$_0$	$Nr._{0,0}$	$Nr._{0,1}$	$\mathbf{dyn}_0$
		…	
name$_{r-1}$	$Nr._{r-1,0}$	$Nr._{r-1,1}$	$\mathbf{dyn}_{r-1}$
}			

Tabelle A.7: *Fix2toResonance*–**Block.**
Die Syntax entspricht derjenigen im Stable2Body–Block. Die möglichen „Dynamik"–Schlüsselwörter sind in Tabelle A.6 angegeben.

Allgemein					
Fix3toResonance r {					
#Name	Dynamik	Name	Dynamik	Name	Vierervektoren
name_0	$\mathbf{dyn}_0$	$\mathrm{name}_{0,0}$	$\mathbf{dyn}_{0,0}$	$\mathrm{name}_{0,1}$	$Nr._{0,0}$ $Nr._{0,1}$ $Nr._{0,2}$
			...		
name_{r-1}	$\mathbf{dyn}_{r-1}$	$\mathrm{name}_{r-1,0}$	$\mathbf{dyn}_{r-1,0}$	$\mathrm{name}_{r-1,1}$	$Nr._{r-1,0}$ $Nr._{r-1,1}$ $Nr._{r-1,2}$
}					

Beispiel
Fix3toResonance *1* {
f1(1285) **bw-q02-q2-barrier** a0(980) **bw-q02-q2-barrier** pion *2 3 4*
}

Tabelle A.8: *Fix3toResonance*–**Block.**
Wenn zuvor im Particle–Block der Endzustand $\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0\eta$ definiert wurde, d.h. Teilchen Nr.2 und Nr.3 sind neutrale Pionen und Teilchen Nr.4 ist ein η–Meson, dann stehen, durch eine Definition wie in dem Beispiel (vor dem Resonanz–Block), für die Resonanzen nur noch die Teilchen $\pi^+\pi^-f_1$ zur Verfügung.

einzige Sub–Resonanz in drei Teilchen zerfallen kann, dann kann die Kombinatorik der Sub–Resonanz auf diese drei Teilchen beschränkt werden. Keines dieser Teilchen steht dann der Kombinatorik anderer Resonanzen zur Verfügung. Diese Möglichkeit wurde in Hinblick auf die in [40] vorgestellten $f_1(1285)\pi\pi \rightarrow 4\pi\eta$–Datensätze in das Programm aufgenommen. Diese Daten wurden so selektiert, daß das f_1 überwiegend über $a_0\pi$ in $2\pi\eta$ zerfällt. Dieses Beispiel ist auch in Tabelle A.8 neben der allgemeinen Syntax aufgeführt.

A.1.2.3 Kanäle

Die Kanäle sind die Zerfallsprodukte des Anfangszustandes. Die Kanäle werden vom Programm anhand der Namen der Zerfallsprodukte identifiziert (Tabelle A.9). Jedes Zerfallsprodukt kann eine Resonanz oder ein stabiles Teilchen sein. Mit der Definition der Kanäle sind die Zerfallsketten in (4.125) vollständig festgelegt. Jeder vom Benutzer defi-

Allgemein		Beispiel	
Channels c {		**Channels** *3* {	
#Name	Name	#Name	Name
$\mathrm{name}_{0,0}$	$\mathrm{name}_{0,1}$	f2(1270)	pion
...		f0(1500)	pion
$\mathrm{name}_{c-1,0}$	$\mathrm{name}_{c-1,1}$	f2(1640)	pion
}		}	

Tabelle A.9: *Channel*–**Block.**
Die Kanäle sind die Zerfallsprodukte des Anfangszustandes. Wurden die im Beispiel gezeigten Resonanzen zuvor alle als $\pi\pi$-Resonanzen definiert, dann muß der im Particle–Block definierte Endzustand entweder $\pi^0\pi^0\pi^0$ oder $\pi^+\pi^-\pi^0$gewesen sein.

nierte Kanal muß am Ende der Zerfallskette den gesamten, im *Particle*–Block definierten Endzustand umfassen. Überzählige Teilchen (sogenannte Zuschauer–Teilchen), die an der Reaktion nicht teilnehmen, werden nicht in der Steuerungsdatei angegeben. Eine dynamische Funktion für den Zerfall des Anfangszustandes in die Kanäle ist bisher noch nicht vorgesehen, d.h. die partiellen Zerfallsamplituden des Anfangszustandes sind, wie die partiellen Produktionsamplituden, lediglich komplexe Zahlen (ggfs. freie Parameter).

A.1.2.4 Anfangszustand

Da halbzahliger Spin noch nicht voll implementiert ist, müssen die Primärteilchen einer Reaktion entweder zwei Bosonen oder zwei Fermionen sein. Zur Zeit werden nur die Anfangszustände der Proton–Antiproton–Annihilation vollautomatisch generiert. Eine Erweiterung der Generatoren des Programms auf andere Fermion–(Anti–)Fermion Paare (z.B. $\bar{p}n$, e^+e^-, usw.) oder auf bestimmte bosonische Anfangszustände (z.B. J/ψ) ist trivial. Letzendlich wird nur eine Liste mit den Quantenzahlen aller möglichen Anfangszustände benötigt. Aus diesem Grund hat der Benutzer nur wenige freie Optionen, wie in Tabelle A.10 gezeigt. Das Schlüsselwort *properStates* wählt den Amplituden–Erbauer (siehe Kapitel B.4) aus, der die Form der Gewichtsfunktion bestimmt. Zur Zeit ist nur ein einziger Amplituden–Erbauer implementiert, der die Form von Gl.(4.125) erzeugt.

Allgemein				
InitialState	*properStates*	{		
Beams {				
#Strahl	Name	Masse	Impuls	Einheit
Projectile	antiproton	m_p	$p_p^{\rm lab}$	$\mathbf{u}_p$
Target	proton	m_t	$p_t^{\rm lab}$	$\mathbf{u}_t$
}				
}				

Beispiel				
InitialState	*properStates* {			
Beams {				
Projectile	antiproton	*0.9382731*	*0.6*	**gev**
Target	proton	*0.9382731*	*0*	**gev**
}				
}				

Tabelle A.10: *InitialState*–**Block.**
Zur Zeit können hier nur die Massen m (in GeV/c²), die Strahlimpulse im Laborsystem p^{lab} und deren Einheiten (GeV/c oder MeV/c) vom Benutzer frei gewählt werden.

A.1.2.5 Bedingungen und Annahmen

TARA bietet die bisher einzigartige Möglichkeit, die Amplitude anhand von Benutzer–definierten Annahmen bzw. Bedingungen symbolisch zu vereinfachen. Die wichtigste Bedingung, die der Benutzer angeben muß, ist der maximal beitragende Gesamtdrehimpuls $J_{\rm max}$ des Anfangszustandes. Jeder Anfangszustand mit einem höheren Gesamtdrehimpuls

Allgemein					
Assumptions	{				
#Unter-Block		Annahme		Wert	
InitialState	{	**maxJ**		j	}
#Unter-Block		Zerfall		Annahme	Wert
Decays d	{	dkey_0	{	$\textbf{dass}_0$	w_0 }
		...			
		dkey_{d-1}	{	$\textbf{dass}_{d-1}$	w_{d-1} }
}					
#Unterblock		Unterblock		Matrixelement	
Alphas	{	**Zeros** z	{	akey_0	
				...	
				akey_{z-1}	
}	}		}		

Beispiel					
Assumptions	{				
InitialState	{	**maxJ** *4* }			
Decays *2*	{	ppbar(1D2),a2(1320),eta	{	**max-L** *0*	}
		ppbar(1G4),f2(2150),pion	{	**cancel**	}
}					
Alphas	{	**Zeros** *2*	{	Alpha-LS(ppbar(3F3),a2(1320),eta,5,2)	
				alpha-ll(ppbar(3P1),a2(1320),eta,0,0)	
}	}		}		

Tabelle A.11: *Assumptions*–**Block.** *Erläuterung siehe Text.*

wird vernachlässigt[3]. Alle anderen Bedingungen sind optional. Die Annahme, daß ein bestimmter Zerfall eines Anfangszustandes nur vernachlässigbar zum Wirkungsquerschnitt beiträgt, kann im Unter–Block *Decays* mit dem Schlüsselwort **cancel** realisiert werden. In dem in Tabelle A.11 angeführten Beispiel wird der Zerfall $\bar{p}p^1G_4 \to f_2\pi$ verboten, und damit die Anzahl der Parameter verringert. Auf diese Weise können Anfangszustände auch komplett aus der Gewichtsfunktion herausgenommen werden. Dazu müssen alle Zerfälle (in die Kanäle) des auszuschließenden Anfangszustandes verboten werden. In diesem Fall werden auch keine Produktionsamplituden für den jeweiligen Anfangszustand benötigt, was die Anzahl der Parameter weiter verringert. Es ist nicht erlaubt Resonanzen auf diese Weise auszuschließen. Resonanzen müssen aus dem *Resonanz*–Block entfernt werden. Im *Decay*–Unter–Block können für jeden Zerfall auch Maximal- und Minimalwerte für den relativen Bahndrehimpuls L, den Gesamtspin S und die Helizitäten λ_1, $\lambda 2$ der Tochterteilchen vorgegeben werden, sofern solche Annahmen einen Zerfall nicht insgesamt verbieteten (Dafür muß **cancel** verwendet werden). So läßt die Annahme (**max-L** *0*) in Tab. A.11 nur Zerfälle mit $L = 0$ für den Zerfall $\bar{p}p^1D_2 \to a_2\eta$ zu. Sollen partielle Zerfälle mit bestimmten Helizitäten oder L–S–Kombinationen gezielt verboten werden, so können im Unter–block *Alphas* unter *Zeros*[4] eine beliebige Anzahl von partiellen Zerfallsamplituden

[3] Die Erhöhung des maximalen Gesamtdrehimpulses im Anfangszustand um nur eine Einheit führt i.A. zu einer deutlichen Erhöhung der Anzahl der freien Paramater.

[4] Der weitere Unterblock ist hier nur erforderlich, da weitere Annahmen für Matrixelemente vorgesehen sind, diese aber noch nicht vollständig implementiert sind.

angegeben werden. In Tabelle A.11 werden zum Beispiel die partiellen Zerfallsamplituden $A_{5,2}^{\bar{p}p\,^3F_3\to a_2,\eta}$ (die L–S–Kombination: $L=5$, $S=2$) und $\alpha_{0,0}^{\bar{p}p\,^3P_1\to a_2,\eta}$ (der Zerfall mit den Helizitäten $\lambda_{a_2}=0$ und $\lambda_\eta=0$) zu Null gesetzt. Die Schlüsselwörter für Zerfälle (dkey) und für partielle Zerfallsamplituden (akey) werden erst zur Laufzeit generiert. Da diese Namen unter Umständen sehr lang sind, bietet *TARA* die Möglichkeit alle Schlüsselwörter in eine eigene Datei – die *Symboldatei* – zu schreiben.

Die Kommandozeilen–Option:	– –**symbol**
erzeugt die	
Symboldatei:	*fit–name.fit–num.***assume-keys**

Die Schlüsselwörter für Zerfälle (dkey) und für partielle Zerfallsamplituden (akey) können vom Benutzer direkt aus der *Symboldatei* in die *Steuerungsdatei* kopiert werden. Außerdem wird der Benutzer über alle erlaubten Zerfälle und partiellen Amplituden informiert.

A.1.2.6 Daten

Der Benutzer muß in getrennten Dateien die Vierervektoren gemessener und Monte–Carlo–simulierter Ereignisse zur Verfügung stellen. Hierbei ist eine volle Simulation des Detektors

Allgemein						
Datasamples	*user-data-name* {					
#Typ	Anz.	Anz.	Datei	Einheit	Format	Reihenfolge
RealData	N_R^{ges}	N_R	D_R	$\mathbf{u}_R$	$\mathbf{f}_R$	$\mathbf{o}_R$
MonteCarlo	N_M^{ges}	N_M	D_M	$\mathbf{u}_M$	$\mathbf{f}_M$	$\mathbf{o}_M$
}						

Beispiel						
Datasamples	*eep* {					
RealData	*3789*	*1000*	*ep0e.data*	**gev**	**ascii**	**xyz-momentum-energy**
MonteCarlo	*9321*	*5000*	*ep0e.mc*	**mev**	**float**	**energy-xyz-momentum**
}						

Tabelle A.12: *Datasamples*–**Block.**
Das Beispiel zeigt bereits alle möglichen Optionen für die Einheit, das Format und die Reihenfolge der Komponenten der Vierervektoren in den vom Benutzer bereitgestellten Dateien.

notwendig, um die Akzeptanz, die Effizienz und die Auflösung des Detektors zu berücksichtigen. In der *Steuerungsdatei* müssen die Dateinamen, das Dateiformat, die aktuell zu verwendende Anzahl von Ereignissen, die Gesamtanzahl aller zur Verfügung stehender Ereignisse, die Einheit der Komponenten der Vierervektoren und die Reihenfolge der Komponenten angegeben werden. Außerdem muß der Benutzer seinen Daten einen Namen (*user-data-name*) geben, anhand dessen *TARA* bei einem Neustart erkennt, ob Funktionen aus einer vorhergehenden Anpassung eingeladen werden können (siehe Kapitel B.3).

A.1.2.7 Pfade

Schließlich muß noch festgelegt werden, wo *TARA* die Dateien der Programm–Ausgabe abspeichern soll. Dafür gibt der Benutzer Hauptverzeichnisse an, in denen *TARA* jeweils

Allgemein		Beispiel	
Paths {		**Paths** {	
#Typ	Pfad	#Typ	Pfad
LoadSave	P_L	**LoadSave**	*/scratch/tara*
Histograms	P_H	**Histograms**	*/home/tara*
Minimizer	P_M	**Minimizer**	*/home/tara*
}		}	

Tabelle A.13: *Paths*–**Block.**
Ein Teil der Ausgaben des Programms befinden sich in den hier angegeben Verzeichnissen.

eine eigene Unter–Verzeichnisstruktur anlegt, um die Ausgaben geordnet abzuspeichern. In jedem der drei in Tabelle A.13 gezeigten Verzeichnisse wird ein Verzeichnis mit dem Namen der Anpassung[5] angelegt. Im *LoadSave*–Verzeichnis werden Werte von Funktionsobjekten (siehe B.3) in binärer Form abgelegt. Histogramm–Dateien und Makro–Dateien für die Histogramme werden in eigenen Verzeichnissen unter dem *Histograms*–Verzeichnis abgespeichert. Außerdem werden für jeden Minimierungsschritt (s.u.) die Werte aller Parameter in einem Unter–Verzeichnis des *Minimizer*–Verzeichnisses abgespeichert, um an beliebiger Stelle einen Neustart zu ermöglichen.

A.1.3 Strategie

Vor Beginn einer Anpassung muß noch eine weitere Datei, die *Standard–Parameterdatei*, erstellt werden. In dieser Datei werden die Startwerte aller Parameter, ob frei variierbar oder konstant, vorgegeben. Die *Standard–Parameterdatei* wird automatisch von *TARA* erzeugt.

Die Kommandozeilen–Option:	**– –symbol**
erzeugt die	
Standard–Parameterdatei:	*fit–name.fit–num.***default–parameter**

In der *Standard–Parameterdatei* können andere Startwerte für die Parameter, deren Fehler usw., als die von *TARA* vorgeschlagenen, vom Benutzer eingesetzt werden. *TARA* unterscheidet zwischen für das Minimierungspaket frei variierbaren Parametern (Schlüsselwort: **variable**) und konstanten Parametern (Schlüsselwort: **always–fixed**). Der Status eines Parameters darf vom Benutzer von **variable** auf **always-fixed** verändert werden. Dabei ist zu beachten, daß dann auch in den Ergebnissen, den *Parameterdateien*, diese Parameter als konstant eingestuft werden. Die umgekehrte Richtung ist nur möglich bei Parametern, bei denen *TARA* nicht von selbst als **always–fixed** vorgibt.
Die Minimierung der *NLL*–Funktion erfolgt in einer beliebigen, vom Benutzer vorgegebenen Anzahl von Schritten (engl.: *steps*). Jeder Schritt muß in der *Strategiedatei*, in der gleichen Art und Weise wie bei der Formulierung der Hypothese, definiert werden. Die hiefür zur Verfügung stehenden Komandos zeigt Tabelle A.14. Der Name der *Strategiedatei* ist passend zur *Steuerungsdatei* zu wählen:

Name der *Strategiedatei*: *fit–name.fit–num.***step**

[5]Zur Erinnerung: Der Name der Anpassung ist der Prefix *fit–name* des Namens der *Steuerungsdatei*.

Step *user-step-name*	{
#Schlüsselwort	Schlüsselwörter/Optionen
FixGroup	Parameter-Gruppe (siehe Tab.A.15)
ReleaseGroup	Parameter-Gruppe (siehe Tab.A.15)
FixParameter	Parameter-Name aus der *Standard-Parameterdatei*
ReleaseParameter	Parameter-Name aus der *Standard-Parameterdatei*
Minimizer	**Minuit**
PlotFunction	Histogramm-Schlüssel (siehe Tab.A.15)
PlotCuts	**mass-resonances**
MaximumCalls	Anzahl
Contributions	
}	

Tabelle A.14: *Step*–**Block.**
Es können beliebig viele Step–Blöcke definiert werden. Alle Haupt-Schlüsselwörter (linke Spalte) sind optional.

Für jeden Schritt besteht die Möglichkeit einen freien Parameter (mit der Eigenschaft **variable**) temporär zu fixieren, oder einen zuvor fixierten Parameter wieder frei zu lassen. Für einzelne Parameter wird dies erreicht, indem der Name des Parmeters hinter den Schlüsselwörtern **FixParameter** oder **ReleaseParameter** angegeben wird. Die Namen der Parameter sind der *Standard–Parameterdatei* zu entnehmen. Es können auch ganze Gruppen von Parametern fixiert oder zur Variation freigelassen werden (**FixGroup**, **ReleaseGroup**). Dazu steht eine große Anzahl selbsterklärender Schlüsselwörter zur Verfügung, die in der linken Spalte von Tabelle A.15 aufgeführt sind. Da ein Parameter zu mehreren Gruppen gehören kann, sind folgende Regeln zu beachten:

- Komandos für einzelne Parameter haben höchste Priorität.
- Variieren hat höhere Priorität als Fixieren.

Sollen zum Beispiel alle Massen–Parameter bis auf den bestimmten Masse–Parameter X variiert werden, dann leistet

ReleaseGroup **mass**
FixParameter X

das Gewünschte. Hierbei ist X der vollständige Name des Masse–Parameters aus der *Standard–Parameterdatei.* Zu Beginn der Minimierung (Schritt Nr.0) sind alle Parameter fixiert, sodaß der Benutzer gezwungen ist zumindest einen „Step-Block“ in der *Strategiedatei* zu definieren, in dem mindestens ein Parameter freigelassen wird. Mit **PlotFunction** und einem Histogramm–Schlüsselwort (siehe die rechte Hälfte von Tabelle A.15), wird *TARA* veranlaßt nach Beendigung eines Minimierungsschrittes Histogramme zu füllen. Ein solches Paar darf beliebig oft in einem *Step*–Block vorkommen. Welche Funktionen visualisiert werden, wird durch das Histogramm–Schlüsselwort bestimmt. Wenn die gleichen Histogramme für jeden Minimierungsschritt gefüllt werden, dann läßt sich die Verbesserung der Anpassung über die gesamte Laufzeit visualisieren. Das Kommando **PlotCuts** **mass–resonances** hat zur Zeit nur Auswirkungen, wenn gleichzeitig Histogramme für die Zerfallswinkel gefüllt werden (**PlotFunction** **angles**). Dann nämlich werden noch weitere Histogramme für die Zerfallswinkelverteilungen einer jeden Resonanz erzeugt. Für ein solches Histogramm muß die invariante Masse, die zu derselben

Parameter-Gruppen	Histogramme
all-parameters	**fourvector**
complex-parameters	* **mass**
real-parts	* **angles**
imaginary-parts	† **d-product**
magnitudes	† **d-sum-of-products**
phases	† **break-up-momentum**
production-parameters	† **breit-wigner**
production-real-parts	† **complex-complex-product**
production-imaginary-parts	† **complex-complex-sum**
production-magnitudes	† **absolute-of-complex**
production-phases	† **real-real-product**
initial-parameters	† **real-real-sum**
initial-real-parts	**all**
initial-imaginary-parts	**debug**
initial-magnitudes	
initial-phases	
resonance-parameters	
resonance-real-parts	
resonance-imaginary-parts	
resonance-magnitudes	
resonance-phases	
real-parameters	
masses	
widths	

Tabelle A.15: **Parameter–Gruppen– und Histogram–Schlüsselwörter für den *Step*–Block.**
Die mit einem Kreuz (†) gekennzeichneten Histogramm–Schlüsselwörter sind noch nicht eigenständig implementiert, die zugehörigen Funktionen können aber mit dem Schlüsselwort **debug** *alle auf einmal histogrammiert werden. Mit dem Schlüsselwort* **all** *werden alle mit einem Stern gekennzeichneten Funktionen histogrammiert.*

Vierervektor–Kombination gehört für welche der Zerfallswinkel berechnet wird, innerhalb eines Intervalls liegen. Das jeweilige Intervall ist symmetrisch zur aktuellen Sollmasse der Resonanz. Die Länge des Intervalls wird der aktuellen Sollbreiten angepaßt (z.B. 50%).
Es ist vorgesehen, daß das Minimierungspaket (**Minimizer**) und die Form der *NLL*–Funktionen (**Likelihood**) bei jedem Schritt gewechselt werden können. Allerdings steht zur Zeit nur *MINUIT* [61] zur Verfügung und es ist auch nur eine Likelihood-Funktion implementiert. Außerdem kann eine maximale Anzahl von Funktionsaufrufen für die *NLL*–Funktion vereinbart werden.
Wird das Schlüsselwort **Contribution** in einem *Step*–Block angegeben, dann werden am Ende dieses Minimierungsschrittes die Beiträge (in %) aller Teilamplituden berechnet. Die Beiträge werden aufgeschlüsselt nach Anfangszuständen, Zerfallskanälen und nach Helizitätskombinationen (λ_s, λ_t) in den Zerfallskanälen. Eine typische *Strategiedatei* zeigt Tabelle A.16. Diese Minimierungsstrategie hat sich als sehr effizient erwiesen und wurde für alle in dieser Arbeit vorgestellten Anpassungen ($\bar{p}\,(600\,\mathrm{MeV}/c)\,p \to \pi^0\pi^0\pi^0$, $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV}/c)\,p$

Strategiedatei	Variiert werden ···
Step *r1* {	··· die Realteile aller komplexen
ReleaseGroup real-parts	Parameter.
}	
Step *i1* {	··· zusätzlich die Imaginärteile.
ReleaseGroup imaginary-parts	
}	
Step *m1* {	··· nur die Massen
FixGroup all-parameters	der Resonanzen.
ReleaseGroup mass	
}	
Step *w1* {	··· nur die Breiten
FixGroup all-parameters	der Resonanzen.
ReleaseGroup width	
}	
Step *r2* {	··· die Realteile aller komplexen
FixGroup all-parameters	Parameter.
ReleaseGroup real-parts	
}	
Step *i2* {	··· zusätzlich die Imaginärteile.
ReleaseGroup imaginary-parts	
}	
Step *mawi* {	··· nur die Massen und Breiten
FixGroup all-parameters	der Resonanzen.
ReleaseGroup mass	
ReleaseGroup width	
}	
Step *comp* {	··· die Real– und Imaginärteile aller
FixGroup all-parameters	komplexen Parameter.
ReleaseGroup complex-parameters	
PlotFunction mass	Generiere Histogramme:
PlotFunction angles	invariante Massen, Zerfallswinkel
PlotCuts mass	und Dalitzplots.
Contributions	Berechne die Beiträge.
}	
Step *all* {	··· alle Parameter.
ReleaseGroup all-parameters	
}	

Tabelle A.16: **Beispiel für eine** ***Strategiedatei.***
Vor dem ersten Minimierungsschritt werden automatisch alle Histogramme einmal erzeugt (simulierte Ereignisse ungewichtet). Nach dem letzten Minimierungsschritt werden automatisch noch einmal alle gewünschten Histogramme erzeugt und die Beiträge berechnet.

$\to \eta\eta\pi^0$ und $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV}/c)\,p \to K^+K^-\pi^0)$ verwendet.
Wenn die *Steuerungsdatei*, die *Standard–Parameterdatei* und die *Strategiedatei* erstellt erstellt sind, dann ist das Programm bereit zum Start einer Anpassung. Es empfiehlt sich

jedoch vor einer echten Anpassung die Minimierungsstrategie zu testen.

Die Kommandozeilen–Option: – –**test**
testet die Minimierungsstrategie (*Strategiedatei*).

Dies bewirkt eine vollständige Ausführung des Programms, allerdings ohne die freien Parameter zu optimieren. Anhand der Ausgaben läßt sich dann überprüfen, ob *TARA* genau das tut, was sich der Benutzer vorgestellt hat. Dies gilt insbesondere für die Definitionen der Minimierungsschritte, deren Auswirkungen nur mit der **test**–Option getestet werden können.

A.2 Ausführung

Die Anpassung wird folgender Kommandozeile gestartet:

Befehl zur Ausführung des Programms:
Tara – –**fit** *fit–name* – –**num** *fit–num* – –**chat** *chat–num* – –**silent**

Die Option **silent** lenkt die Bildschirmausgabe in die Datei *fit-name.tex* um, was sich immer empfiehlt. Der Umfang der Ausgaben wird mit der Option **chat** kontrolliert, wobei ein höherer Wert für *chat–num*$(= 0 \cdots 100)$ einer umfangreicheren Ausgabe entspricht. Die speziellen Optionen **symbols** und **test** wurden bereits erläutert. Eine Liste aller Kommandozeilen–Optionen, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll, wird erzeugt bei einem Syntaxfehler in der Kommandozeile oder durch den Aufruf:

Liste aller Kommandozeilen–Optionen: **Tara** –**?**

Zur bequemeren Ausführung des Programms dienen diverse *Shell-scripts* (*Unix*–Makro–Dateien), die per Frage und Antwort den gewünschten Modus für *TARA* aufrufen und nach Beendigung des Programms die Ausgaben mit LaTeX in das *DVI*–Format übersetzen und ggfs. *PostScript* erzeugen. Eine Übersicht über den Programmablauf und die Implementierung gibt Anhang B.

A.3 Ausgabe

TARA erzeugt in Abhängigkeit von der *Steuerungsdatei*, der *Strategiedatei* und den Kommandozeilen–Optionen unterschiedliche Ausgaben:

1. Dokumentation – Textausgaben
   Wenn *TARA* mit der Option **silent** gestartet wird, dann erzeugt das Programm drei Dateien im LaTeX–Format, deren Umfang mit der Option **chat** gesteuert wird:
   - *fit–name.tex*
     Diese Datei enthält die für den Benutzer wichtigsten Informationen: partielle Zerfallsamplituden, Anfangszustände, Gewichtsfunktion, Parametertabellen (für jeden Minimierungsschritt) und Tabellen der Beiträge (siehe oben: **Contributions**).
   - *Tara_log.tex*
     Für hohe Werte der Option **chat** wird in diese Datei noch zusätzliche Information geschrieben, zum Beispiel die Ausgabe von Funktionsobjekten (siehe Anhang B.3). Diese Datei ist für den Entwickler gedacht und kann je nach Komplexität der Anpassung mehrere tausend Seiten umfassen.

- *Tara_error.tex*
  Diese Datei enthält bei fehlerfreien Programmablauf lediglich das Skelett einer LaTeX–Datei. Wenn ein Fehler auftritt, zum Beispiel ein Syntaxfehler in der *Steuerungsdatei* oder der *Strategiedatei*, dann wird eine Fehlermeldung auf dem Bildschirm ausgegeben, auch wenn die Option (**silent** gewählt wurde. Es empfiehlt sich, diese Datei mit LaTeX zu übersetzen und anzuschauen, um den Fehler zu beheben.

Wird die Option **silent** nicht gewählt, dann erscheinen alle Textausgaben in vermischter Form am Bildschirm. In jedem Fall gibt *TARA* die Überschrift des aktuell bearbeiteten Kapitels am Bildschirm aus, um anzuzeigen an welcher Stelle des Programmablaufs sich das Programm befindet.

2. Histogramme und Makros
   Im *Histogramm–Pfad* (siehe Tabelle A.12: P_H/*fit–name*) werden zwei Verzeichnisse mit den Namen *histos* und *kumac* angelegt. Für jeden *Step*–Block (Tab. A.14) in der *Steuerungsdatei*, der das Schlüsselwort **PlotFunction** enthält, wird in beiden Verzeichnissen (*histos*, *kumacs*) ein Verzeichnis mit gleichen Namen angelegt, der aus dem Namen des *Step*–Blocks generiert wird. Im ersten Pfad werden die Histogramm–Dateien (*HBOOK*–Format) abgelegt und im zweiten Pfad die zugehörigen Makro–Datein (*KUIP*–Format). Wird nach Beendigung von *TARA* das Programm *PAW++* (oder *PAW*) im Verzeichnis P_H/*fit–name* gestartet, dann lassen sich die Histogramme bequem mit Hilfe der erzeugten Makros anschauen.

3. Zwischenergebnisse - *Parameterdateien*
   Für jeden Minimierungsschritt, also jeden *Step*–Block (Tab.A.14) in der *Strategiedatei*, wird nach Beendigung des Schrittes das Zwischenergebnis im Format der *Standard–Parameterdatei* abgespeichert. Diese Dateien befinden sich im Verzeichnis P_M/**Minimizer**, wobei **Minimizer** das gewählte Minimierungspaket ist, z.B. *minuit* für das Programm *MINUIT*. Die Namen der Dateien werden aus den Namen der *Step*–Blöcke (Tab.A.14) zusamengesetzt und lauten: *user–step–name.parameter*. Durch einfaches Umkopieren einer solchen *Parameterdatei* auf die *Standard–Parameterdatei* wird ein Neustart von *Tara* mit einem beliebigen Zwischenergebnis ermöglicht.

4. Ausgaben des Minimierungspaketes
   Wenn das verwendete Minimierungspaket seinerseits Ausgaben erzeugt, dann werden diese im Verzeichnis in dem *TARA* gestartet wurde abgelegt. So erzeugt die Verwendung von *MINUIT* zwei Dateien mit den Namen *minuit.output* und *minuit.save*. Um festzustellen ob das verwendete Minimierungspaket Schwierigkeiten bei der Auffindung des Minimums hatte (oder sonstige interne Fehlermeldungen), sollten diese Dateien überprüft werden.

5. Funktionswerte
   TARA speichert gewisse Funktionswerte in einer eigenen Verzeichnishierarchie ab, um schnelle Neustarts zu ermöglichen. Diese Dateien sind in einem binären Format gespeichert und für den Benutzer irrelevant (siehe Anhang B.3 und B.5, **LFFunction**).

Anhang B

Implementierung

TARA wurde auf einem *IBM–RS–6000* Computer, unter dem Betriebssystem *AIX–V.4.2* entwickelt. Das Programm ist vollständig in *C++* geschrieben, lediglich die Schnittstellen (Funktionen) zu Programm-Bibliotheken (*MINUIT* [61], *HBOOK* [62], *CERNLIB* [63]) erfordern Aufrufe von *FORTRAN-77* Routinen von *C++* aus. *TARA* macht regen Gebrauch von der *Standard Template Library*[1] (*STL*). Hier wurde die *Objectspace V.2.0 STL*–Implementation benutzt, die dem bevorstehenden *ANSI*[2] –Standard[3] genügt. Das Programm kann auch mit der *Hewlett–Packard* (1994) *STL*–Implementation[4] übersetzt werden. Beide Implementationen sind kostenlose *Software* und können z.B. über das *Internet* bezogen werden. Der reine *C++* –Quellcode umfaßt zur Zeit ca 50.000 Zeilen[5]. Der Speicherplatzbedarf und die Rechenzeit variiert mit der Komplexität der Hypothese und steigt ab einem Mindestbedarf (für die symbolische Darstellung) linear mit der Anzahl der Ereignisse. Allerdings sollten mindestens 128Mb Hauptspeicher und doppelt soviel Festplattenspeicher zur Verfügung stehen.

Der Programmablauf von *TARA* kann grob in vier Phasen eingeteilt werden:

1. Initialisierung.
2. Erzeugung der symbolischen Repräsentation.
3. Erzeugung der Funktionsobjekte (berechenbare Repräsentation).
4. Minimierung der *NLL*.

Jeder Phase kann (grob) eine Anzahl von Klassen zugordnet werden, die an der jeweiligen Aufgabe beteiligt sind. Anhand dieser vier Phasen, wird im folgenden die Implementierung (in Stichworten, aber dennoch vollständig) beschrieben. Insbesondere einige Klassen der symbolischen Repräsentation, z.B. **TbD_Id**, **Alpha_Id**, nehmen an allen Phasen des Programms teil. Die Klassen der symbolischen Repräsentation, welche die Basis von *TARA*

[1] *C++* bietet als Sprachmittel sogenannte *Templates* (Schablonen), dabei handelt es sich um Klassen mit parametrisierten Typen.

[2] engl.: American National Standard Institute

[3] Eine Beschreibung der *C++*–Standardbibliothek, inklusive der *STL* findet man z.B. in [64], bzw. nur der *STL* in [65].

[4] Ältere Compiler brauchen für *TARA* eine Implementation der Klasse **string**, die ebenfalls zum *ANSI*–Standard gehört. Diese wird mit beiden *STL*–Implementationen mitgeliefert.

[5] Die Übersetzung des gesamten Programms dauert auf einem *IBM–RS–6000/590* Computer mit ca. 5 spec–fp–95 Rechenleistung, bei optimierender Übersetzung, ca. 72 Stunden. Die ausführbare Datei hat dann eine Größe von ca. 22 Mb. Sowohl die lange Übersetzungszeit, als auch das große *Executable* sind auf den massiven Einsatz von *Templates* zurückzuführen.

bilden, befinden sich daher in einem eigenen Abschnitt B.1. Zu den ersten beiden Phasen gehören die Klassen zur symbolischen Repräsentation (Anhang B.1) und zur Steuerung (Anhang B.2). Die Funktionsklassen (Anhang B.3) sind die Basis für die dritte und vierte Phase. Die Klassen zur Erzeugung der Gewichtsfunktion, zur Minimierung und zur Visualisierung werden in Anhang B.4 beschrieben.
Im letzten Unterkapitel B.5 werden alle Klassen tabellarisch aufgeführt. Dem Namen der Klasse folgen ein oder mehrere Verweise auf die Klassen–Diagramme (Abbildung B.1 – Abbildung B.6). Der jeweils erste Verweis ist dabei der wichtigere. Die Klassen–Diagramme stellen den Aufbau und die Verknüpfungen zwischen den Klassen dar. Die Notation folgt dabei der modifizierten *OMT*[6] Notation [66], wie sie in [67] beschrieben ist. Folgende Beziehungen der Klassen untereinander sind durch Linien (Pfeile) dargestellt:

- Vererbung.
  Die Linie beginnt an der Basisklasse und endet als offenes Dreieck an der abgeleiteten Klasse. Der Name von abstrakten Basisklassen ist kursiv gedruckt.
- Aggregation.
  Ein Pfeil, der mit einer gefüllten Raute an der Klasse beginnt, die ein Objekt der Klasse, auf die der Pfeil zeigt, enthält.
- Referenzen oder Bekanntschaftsbeziehungen
  werden als einfacher Pfeil dargestellt.
- „Enthält viele oder verweist auf viele“.
  Mehrfachreferenzen und Mehrfachaggregationen werden durch einen gefüllten Kreis vor der Pfeilspitze angezeigt.
- Erzeugung.
  Werden Objekte einer anderen Klasse von einer Klassen erzeugt, so wird dies durch einen gestrichelten Pfeil angezeigt.

Bei Klassen die lediglich als Typ–Definition (**typedef**) eines *Standard-Templates* implementiert sind (Listen, Paare, usw.), wird das *Template* mit angegeben. Danach folgen in Stichworten Hinweise auf die Aufgabe der jeweiligen Klasse, sowie Hinweise zur Implementierung. Einige Klassen folgen gewissen Entwurfsmustern, z.B. *Singleton, Erbauer, Brücke* usw., diese sind detailliert in [67] beschrieben. Die Klassen besitzen im Allgemeinen folgende Methoden:

- Konstruktoren.
  - Konstruktor: **Class::Class(···);**
  - Copy-Konstruktor: **Class::Class(const Class&);**
  - Default-Konstruktor: **Class::Class();**
- Vergleichs–Operatoren.
  - **bool Class::operator==(const Class&) const;**,
  - **bool Class::operator! =(const Class&) const;**,
  - **bool Class::operator<(const Class&) const;** ,
  - **bool Class::operatoe>(const Class&) const;**

[6] *OMT*: Object Modeling Technique [66]

- Sonstige, häufig vorkommenden Methoden.
  - Zuweisung: **const Class& Class::operator=(const Class&);**.
  - formatierte Ausgabe: **void Class::print_tex(ostream&)const;**

B.1 Symbolische Repräsentation

Die Klassen zur symbolischen Repräsentation bilden die Grundbausteine von *TARA*. Instanzen dieser Klassen werden in fast allen Teilen des Programms benutzt. Mit ihrer Hilfe wird die symbolische Darstellung der gewünschten Anpassung erzeugt, vereinfacht und abgespeichert. Zudem dienen einige dieser Klassen zur Identifizierung und Unterscheidung der Funktionsobjekte, die in Abschnitt B.3 beschrieben sind. Die Erzeugung von Objekten der Klassen zur symbolischen Repräsentation wird größtenteils von den Methoden der Klassen zur Steuerung, die im nächsten Abschnitt beschrieben werden, vorgenommen. Eine wichtige Ausnahme ist die Klasse **DecayAmplitude**, die für die Erzeugung aller partiellen Zerfallsamplituden (**Alpha**) und dem „Ausmultiplizieren" aller partieller Zerfälle in einem sequentiellen Zerfall zuständig ist. Die Klassendiagramme Abb. B.1 und Abb. B.2 stellen die Abhängigkeiten der einzelnen „Grundbausteine" dar, die in Abschnitt B.5 stichwortartig beschrieben sind.

B.2 Steuerung

Zu Beginn des Programms werden die Kommandozeilen–Optionen eingelesen und in der Klasse **Command_Line_Options** gespeichert, die auch die formatierte Ausgabe initialisiert (**TeX, TeXFormater, Formater, FormaterImplementor**). Anschließend wird die *Teilchentabelle*eingelesen und in ein internes Format konvertiert (**PDTable**). Dann wird die *Steuerungsdatei* eingelesen (**Steer**, **Steer_data**) und mit Hilfe der *Teilchentabelle* prozessiert. Die Erzeugung der symbolischen Repräsentation der Gesamtamplitude verläuft von den Endzuständen (**Quantum_L**) zum Anfangszustand (**InitialState**). Jedes stabile Teilchen erhält dabei eine Kodierung des (der) zugehörigen Vierervektors(en). Dann erfolgt die Erzeugung der Resonanzen (**Resonance_L**). Für jede Resonanz (**Resonance**)

Resonanz	Kombination	Ketten
	Endzustand:	$\pi_0^+\pi_1^-\pi_2^0\omega_3$
$\rho \to \pi\pi$	01	$01 \to 0+1$
	02	$02 \to 0+2$
	12	$12 \to 1+2$
$a_2 \to \rho\pi$	012	$012 \to 01+2 \to 0+1+2$
		$012 \to 02+1 \to 0+1+2$
		$012 \to 12+0 \to 0+1+2$

Tabelle B.1: **Kombinationen und kombinatorische Ketten.**
Für Resonanzen, die nur in (stabile) Teilchen des Endzustandes zerfallen (ρ), sind Kombinationen und kombinatorische Ketten identisch. Hingegen kann es für Resonanzen (a_2), die ihreseits in Resonanzen zerfallen, zu jeder Kombination mehere kombinatorische Ketten geben.

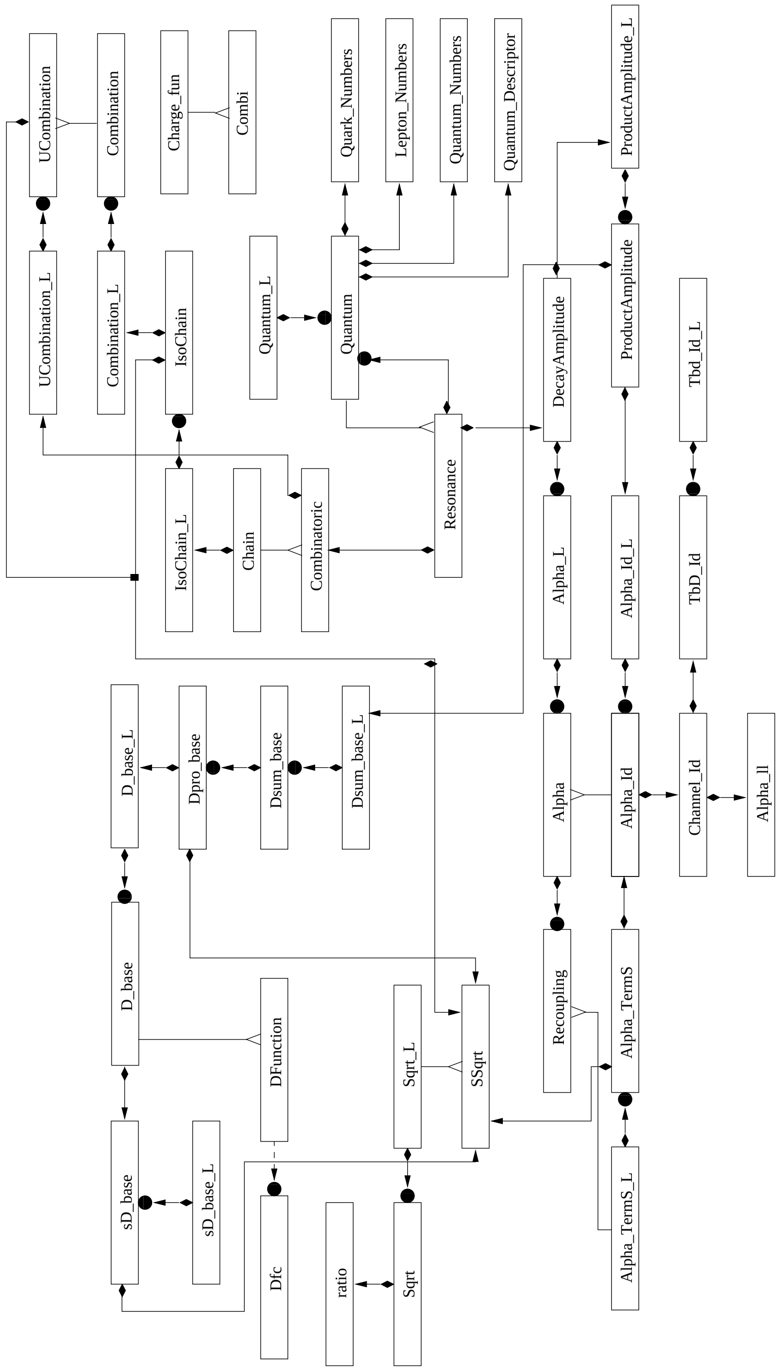

Abbildung B.1: **Klassendiagramm – Resonanzen und Teilchen.**
Die wichtigsten Klassen in diesem Diagramm sind:
Quantum, **Resonance**, **Alpha**, **DecayAmplitude**.

werden alle Kombinationen, die zu den unmittelbaren Zerfallsprodukten führen (**Combination**), erzeugt und auf Erhaltungssätze überprüft (**Decay**). Dazu gehört unter anderen die Erhaltung der Ladung und ggfs. der C-Parität, des Isospins, der G–Parität, der Stran-

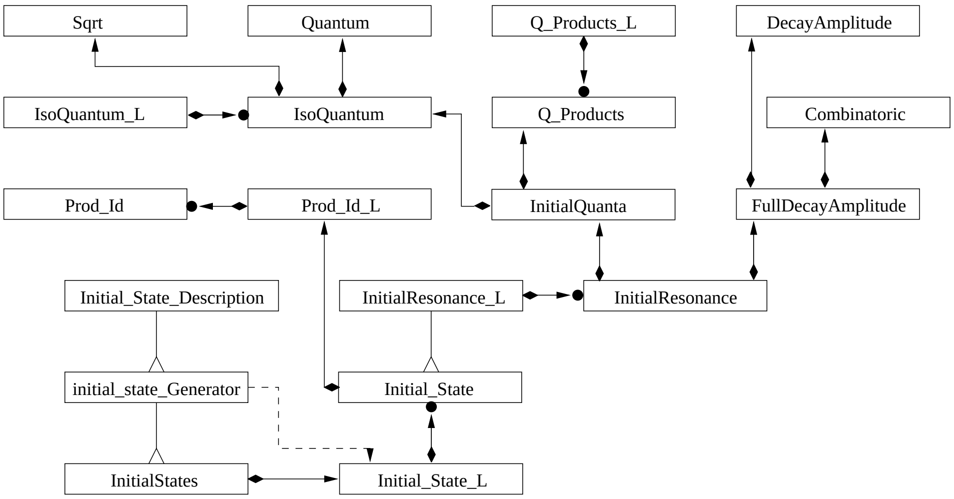

Abbildung B.2: **Klassendiagramm – Anfangszustände.**

geness, usw.. Alle erlaubten Kombinationen werden zusammen mit einem Symmetriesierungsfaktor (Isospin–Clebsch–Gordan–Koeffizient oder nur ein Vorzeichen: ± 1) gespeichert (**UCombination**). Aus diesen Kombinationen und gegebenenfalls den kombinatorischen Ketten von Subresonanzen werden für jede Resonanz kombinatorische Ketten zusammengesetzt, die bei einer Kombination von Vierervektoren für die Resonanz beginnen und bei den Kombinationen der stabilen Teilchen enden (**IsoChain**). Dabei werden gleichzeitig die Isospin-Faktoren der einzelnen Kombinationen zu einem Faktor pro Kette ausmultipliziert bzw. zusammengefaßt. Tab. B.1 verdeutlicht den Unterschied zwischen einer Kombination und einer kombinatorischen Kette. Drehimpulserhaltung und/oder Paritätserhaltung (4.42, 4.44) werden überprüft, wenn die beitragenden partiellen Amplituden von der Klasse **DecayAmplitude** bestimmt werden. Wenn keine partielle Amplitude, oder keine erlaubte Kombination für eine Resonanz gefunden wird, dann wird das Programm mit einer Fehlermeldung beendet. Jede linear unabhängige partielle Amplitude[7](**Alpha_Id**) in der Helizitätsdarstellung (4.26), als auch in der kanonischen Darstellung (4.28), wird zusammen mit seiner Umkopplungsentwicklung (**Recoupling**) (4.29, 4.30) zur jeweils anderen Darstellung gespeichert (**Alpha**). Zudem wird eine Liste von partiellen Amplituden (**Alpha_TermS_L**) gespeichert, die direkt proportional zu der jeweiligen partiellen Amplitude sind. Dies können zum Beispiel, wenn Paritätserhaltung gefordert ist, die partiellen Amplituden $\alpha^J_{-\lambda_s,-\lambda_t}$ sein. Schließlich wird noch eine Entwicklung in derselben Darstellung gespeichert. Diese wird nur dann benötigt, falls sich durch eine Benutzerannahme keine direkte Proportionalität zu einer einzelnen anderen partiellen Amplitude ergibt. In den meisten Fällen ist die Entwicklung in der eigenen Darstellung leer. Sind alle (bezüglich Spin und Parität) erlaubten partiellen Amplituden von der Klasse **DecayAmplitude** erzeugt worden, dann werden diese der Klasse **Assumption** mitgeteilt und mit den Benutzerannahmen verglichen. Wenn Annahmen existieren, dann werden alle partiellen Amplituden in einem zweiten Durchlauf entsprechend umgeformt.
Dies sei an einem Beispiel erläutert:

[7]Ohne Paritätserhaltung gibt es in beiden Darstellungen maximal $(2\lambda_s + 1) \times (2\lambda_t + 1)$ unabhängige partielle Amplituden. Im Falle von Paritätserhaltung bleiben die $A^J_{L,S}$ unabhängig (ansonsten sind die kanonischen Amplituden identisch Null), aber für die $\alpha^J_{\lambda_s,\lambda_t}$ gilt die Gleichung 4.44.

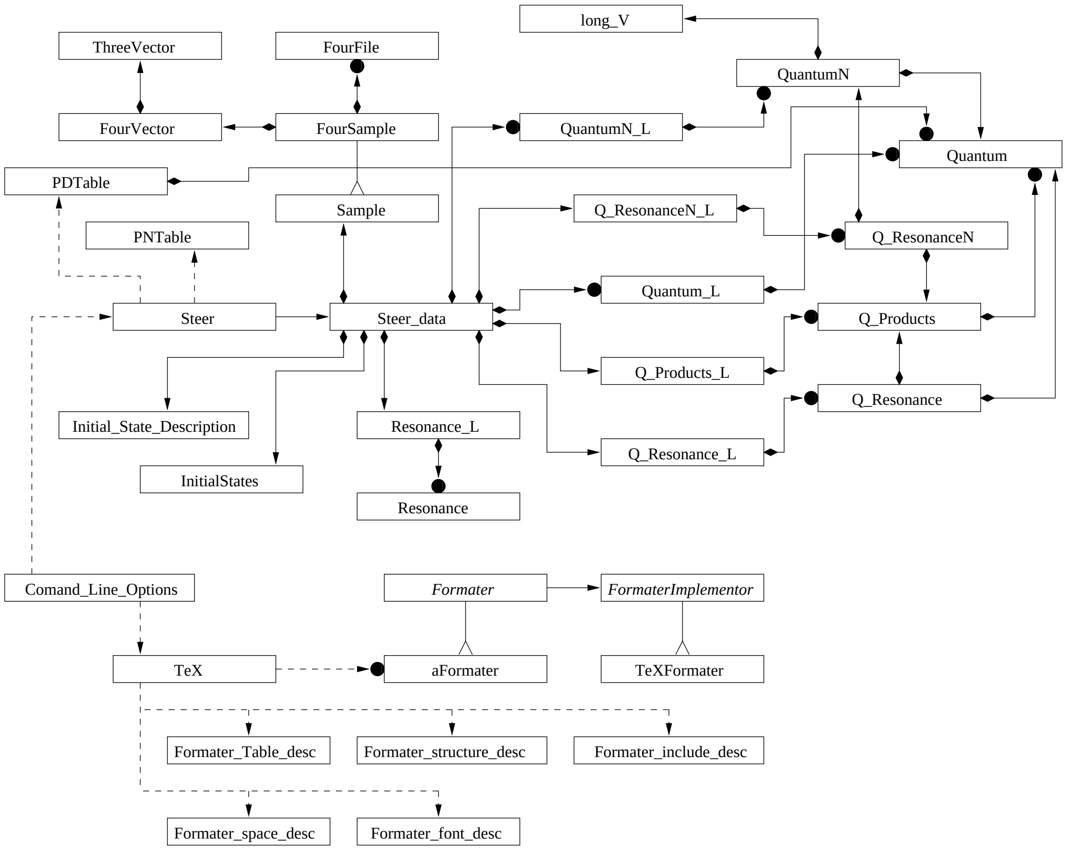

Abbildung B.3: **Klassendiagramm – Steuerung.**

Gegeben sei der Zerfall $p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0} \to f_2(1270) + \pi$ d.h. $2^+ + \to 2^+ + 0^-$. Werden nur die Spins berücksichtigt, dann gibt es in beiden Darstellungen fünf linear unabhängige partielle Amplituden:

$$\alpha_{0,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}, \alpha_{1,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}, \alpha_{-1,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi},$$

$$\alpha_{2,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}, \alpha_{-2,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}$$

beziehungsweise

$$A_{0,2}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}, A_{1,2}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}, A_{2,2}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi},$$

$$A_{3,2}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}, A_{4,2}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}$$

Wenn Paritätserhaltung gefordert wird, dann verringert sich die Anzahl der linear unabhängigen partiellen Amplituden um Zwei. Denn in der kanonischen Darstellung sind dann nach Gl.(4.42) die Zerfälle mit ungeraden Bahndrehimpulsen verboten ($L = 1, 3$), also gilt

$$A_{1,2}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} = A_{1,2}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} = 0$$

Im Gegensatz dazu ergeben sich in der Helizitätsdarstellung nach Gl.(4.44) die Proportionalitäten:

$$\alpha_{1,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} = \alpha_{-1,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} \tag{B.1}$$

$$\alpha_{2,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} = \alpha_{-2,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} \tag{B.2}$$

Die Umkopplungsgleichungen von der Helizitätsdarstellung zur kanonischen Darstellung lauten dann

$$\begin{aligned}\alpha_{0,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} &= A_{0,2}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} - \sqrt{\tfrac{10}{7}}A_{2,2}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}\\ &\quad +3\sqrt{\tfrac{2}{7}}A_{4,2}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}\end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{1,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} &= A_{0,2}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} - \sqrt{\tfrac{5}{14}}A_{2,2}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}\\ &\quad -2\sqrt{\tfrac{2}{7}}A_{4,2}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{2,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} &= A_{0,2}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} + \sqrt{\tfrac{10}{7}}A_{2,2}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}\\ &\quad +\sqrt{\tfrac{1}{14}}A_{4,2}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}\end{aligned} \tag{B.5}$$

und in umgekehrter Richtung

$$\begin{aligned}A_{0,2}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} &= \tfrac{1}{5}\alpha_{0,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} + \tfrac{2}{5}\alpha_{1,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}\\ &\quad +\tfrac{2}{5}\alpha_{2,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}\end{aligned} \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}A_{2,2}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} &= -\sqrt{\tfrac{2}{35}}\alpha_{0,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} - 2\sqrt{\tfrac{1}{70}}\alpha_{1,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}\\ &\quad +2\sqrt{\tfrac{2}{35}}\alpha_{2,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}\end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}A_{4,2}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} &= \tfrac{3}{5}\sqrt{\tfrac{2}{7}}\alpha_{0,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} - \tfrac{4}{5}\sqrt{\tfrac{2}{7}}\alpha_{1,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}\\ &\quad +\tfrac{2}{5}\sqrt{\tfrac{1}{14}}\alpha_{2,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}\end{aligned} \tag{B.8}$$

Also werden insgesamt jeweils drei linear unabhängig partielle Amplituden für jede Darstellung erzeugt, das heißt insgesamt sechs Objekte der Klasse **Alpha**. Jedes der sechs Objekte speichert die zugehörige Umkopplungsgleichung (B.3-B.8). Keines der sechs Objekte besitzt eine Entwicklung in der eigenen Darstellung, und nur für die partiellen Amplituden $\alpha_{1,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}$ und $\alpha_{2,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}$ ist die Liste der proportionalen partiellen Amplituden nicht leer. Die jeweilige Liste besitzt jeweils ein Element, nämlich (B.1) beziehungsweise (B.2). Die sechs verbleibenden partiellen Amplituden werden der Klasse **Assumption** gemeldet, die ihrerseits zurückmeldet, ob Annahmen bezüglich dieser Matrixelemente existieren. Wenn zum Beispiel der Benutzer vorgibt, daß die partiellen Amplituden (Zerfälle) mit $(\lambda_{f_2(1270)} = 0, \lambda_\pi = 0)$ und $(\lambda_{f_2(1270)} = 1, \lambda_\pi = 0)$[8]

$$\alpha_{0,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}, \alpha_{1,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}$$

[8] In diesem Fall kann auch $(\lambda_{f_2(1270)} = -1, \lambda_\pi = 0)$ nicht beitragen.

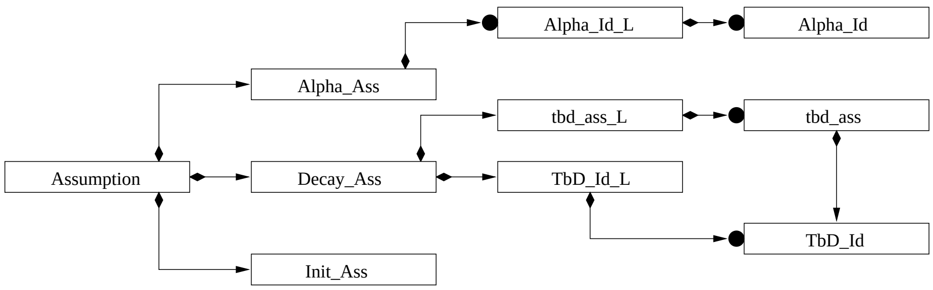

Abbildung B.4: **Klassendiagramm – Annahmen.**

nicht beitragen, dann verbleibt in beiden Darstellungen nur jeweils eine partielle Amplitude. Die Klasse **DecayAmplitude** formt dann alle partiellen Amplituden und Umkopplungsgleichungen entsprechend um. Dabei werden Amplituden, die identisch Null sind, und Amplituden, die direkt proportional zu einer anderen partiellen Amplitude in derselben Darstellung (jeweils eines von beiden) sind, gelöscht. Mit den obigen Annahmen lautet das Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\alpha_{2,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} &= \alpha_{-2,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} && \text{(B.9)}\\
&= 35\sqrt{\tfrac{1}{14}}A_{4,2}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} && \text{(B.10)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{4,2}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} &= \tfrac{1}{10}\sqrt{5}A_{2,2}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} && \text{(B.11)}\\
&= \tfrac{1}{7}\sqrt{\tfrac{7}{2}}A_{0,2}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} && \text{(B.12)}\\
&= \tfrac{2}{5}\sqrt{\tfrac{1}{14}}\alpha_{2,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} && \text{(B.13)}
\end{aligned}$$

Mit den verbleibenden partiellen Amplituden in der Helizitätsdarstellung wird schließlich die symbolische Repräsentation der Zerfallskette erzeugt:

$$\begin{aligned}
A^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi} &= \alpha_{2,0}^{p\bar{p}\left({}^1D_2\right)_{S_0},f_2(1270),\pi}\,\alpha_{0,0}^{f_2(1270),K,K}\\
&\quad \left(D_{0,2}^{2^*}D_{2,0}^{2^*} + D_{0,-2}^{2^*}D_{-2,0}^{2^*} \right) && \text{(B.14)}
\end{aligned}$$

Gleichung (B.14) ist der LaTeX–Ausgabe von *TARA* entnommen. Die entsprechenden Zerfallswinkel wurden hier weggelassen. Der Ausdruck (B.14) muß für jede erlaubte kombinatorische Kette berechnet werden. Im Allgemeinen ergibt sich ein Vektor aus Summen von Produkten von D-Funktionen. Der Vektor in (B.14) besitzt nur eine Zeile, da nur die Helizität Null ($M_\mu = 0$) für Singulett-Zustände (${}^1D_2$) erlaubt ist.
Das Ergebnis aller Umformungen wird für jede erlaubte Helizität des zerfallenden Zustandes gespeichert (**ProductAmplitude**), das heißt einerseits ein Produkt aus partiellen Zerfallsamplituden (**Alpha_Id_L**) und andererseits eine Summe aus Produkten von D–Funktionen (**Dsum_base_L**). Im obigen Beispiel ist nur eine Helizität möglich, also wird auch nur ein Objekt der Klasse **ProductAmplitude** erzeugt und in einer Liste solcher Objekte (**ProductAmplitude_L**) abgespeichert. Insgesamt werden alle partiellen Amplituden und die symbolische Repräsentation der Winkelabhängigkeit (B.14) in der Klasse

DecayAmplitude gespeichert (siehe Klassendiagramm in Abb. B.1).
Für jeden Kanal in den ein Anfangszustand zerfallen kann wird in analoger Weise ein Objekt der Klasse **InitialResonance** (Klassendiagramm in Abb.B.2) erzeugt, die mit der Hilfsklasse **FullDecayAmplitude** die Kombinatorik der Zerfallskette (**Combinatoric**) und die partiellen Zerfälle **DecayAmplitude** vereinigt. Die symbolische Repräsentation eines Anfangszustandes (**Initial_State**) enthält eine Liste der Zerfallskanäle (**InitialResonance_L**) und eine Liste aller Produktionsamplituden (**Prod_Id_L**). Mit Hilfe der Beschreibung des Anfangszustandes (**Initial_State_Description**[9]) wird ein passender Generator (**initial_state_Generator**) ausgewählt, der alle Anfangszustände bis zum gewünschten maximalen Gesamtspin J_{max} erzeugt. Der Generator speichert diejenigen Anfangszustände, die in mindestens einen der Kanäle (und damit in den Endzustand) zerfallen können, in einer Liste (**Initial_State_L**), die ihrerseits von der vom Generator abgeleiteten Klasse **Initial_States** gespeichert wird.

B.3 Berechnung von Funktionen

Die symbolische Repräsentation der Gewichtsfunktion, letztendlich ein Objekt der Klasse **InitialStates**, wird nach ihrer Erzeugung auf eine vielfach verkettete Struktur von Objekten abgebildet, die im folgenden Funktionsobjekte genannt werden. Der Aufbau der Funktionsklassen ist im Klassendiagramm von Abb. B.5 dargestellt und wird in diesem Abschnitt erläutert. Die Funktionsklassen sind für die tatsächliche Berechnung und Speicherung eines symbolischen Ausdrucks für alle der Anpassung zur Verfügung gestellten Ereignisse (Daten– und Monte Carlo–Ereignisse) zuständig. Funktionsobjekte, die Ausdrücke berechnen, die für alle Ereignisse verschieden sind (z.B. die Zerfallswinkel: **Angles_LFF**), haben daher einen Speicherbedarf S_{obj} von

$$S_{\mathrm{obj}} \quad = \quad (n_d + n_m)\, S_w$$

Hierbei bezeichnet S_w den Speicherbedarf für einen Funktionswert, also zum Beispiel 16 byte für eine komplexe Zahl in *double precision*. Der Speicherbedarf und auch die benötigte Rechenzeit zur Neuberechnung eines Funktionsobjektes steigt daher linear mit der Anzahl aller Ereignisse (Monte Carlo: n_m, Daten n_d). Da möglichst viele Ereignisse in eine Analyse einbezogen werden sollen, muß unbedingt sichergestellt werden, daß zu jedem Ausdruck der berechnet werden muß, nur ein einziges Funktionsobjekt existiert, unabhängig davon an welcher Stelle in der Gewichtsfunktion der Ausdruck benötigt wird. Die abstrakte Basisklasse aller Funktionsklassen ist die Klasse **FFunction**. Direkt von **FFunction** abgeleitet sind nur die abstrakten Klassen **CFFunction** und **ParameterFF**. **CFFunction** ist die Abstraktion einer verketteten Funktion, also einer Funktion, deren Eingangswerte ihrerseits Funktionen sind. **ParameterFF** stellt die Abstraktion eines beliebigen Parameters dar. Die Klasse **CFFunction** bildet zusammen mit **FFunction** ein Kompositum [67]. Typisch für dieses Entwurfsmuster ist, daß **CFFunction** eine Liste mit Zeigern auf Objekte der eigenen Basisklasse (**FFunction_PL**) enthält[10], die im folgenden als Sub-Liste bezeichnet werden soll. Auch die Basisklasse **FFunction** selbst aggregiert eine solche Liste, die im folgenden Top–Liste genannt wird. Die Top–Liste eines Funktionsobjektes F enthält Verweise auf diejenigen Funktionsobjekte, deren Eingangswerte

[9]Ein Objekt dieser Klasse entspricht dem „InitialState-Block" in der *Steuerungsdatei* (Tab. A.10 in Kapitel A.1.2.4).

[10]Konkrete Klassen die von **FFunction** abgeleitet sind, werden häufig als Blätter bezeichnet, wohingegen konkrete Klassen die von **CFFunction** abgeleitet sind, als Äste bezeichnet werden.

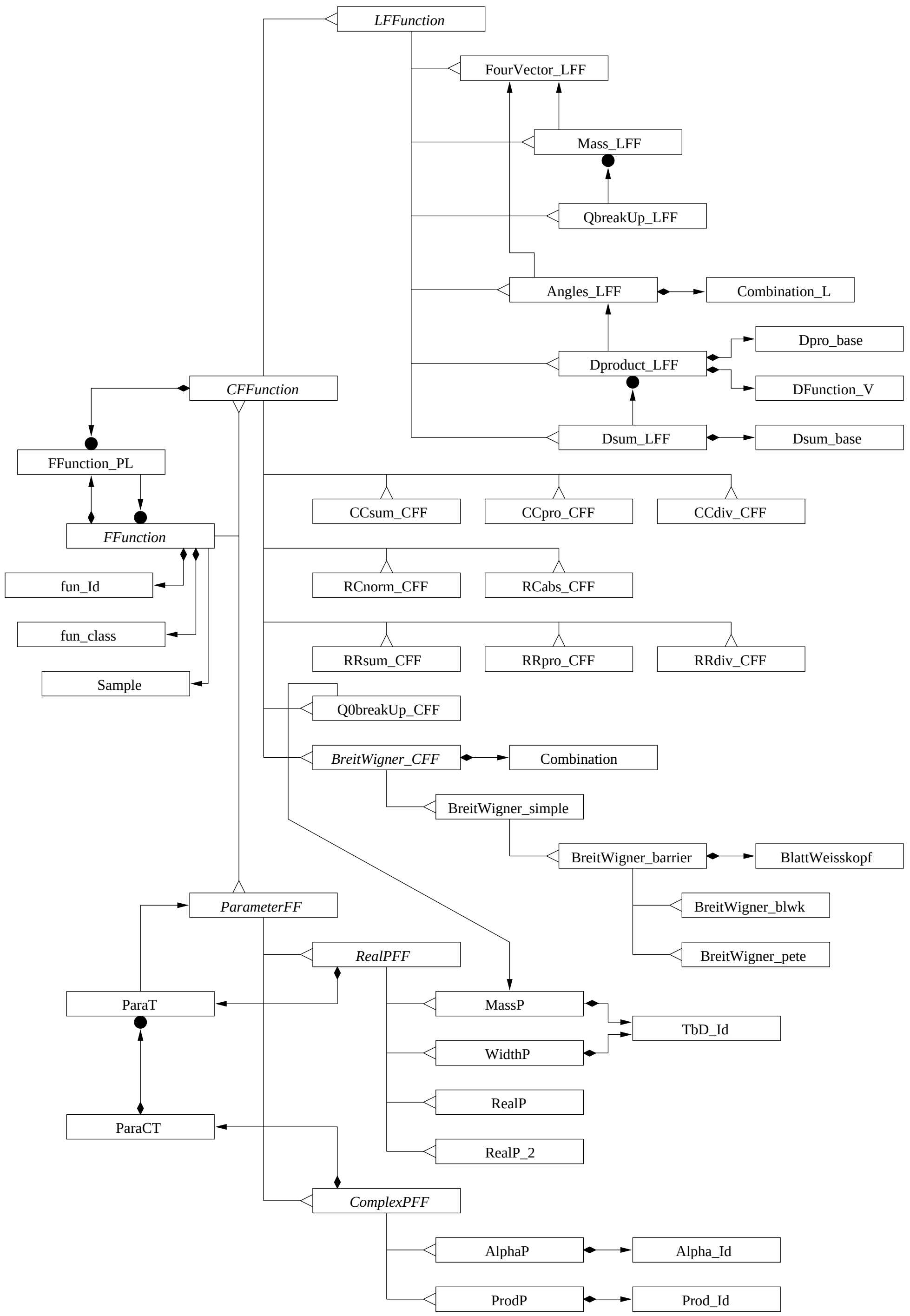

Abbildung B.5: **Klassendiagramm – Funktionen.**

die Funktionswerte von F sind. Über die Top–Listen wird den Funktionsobjekten rekursiv mitgeteilt, ob ein Zwischenergebnis, von dem ein bestimmtes Objekt abhängt, neu berechnet werden muß. In diesem Fall muß auch das Objekt selbst neu berechnet werden.

In umgekehrter Richtung verweist die Sub–Liste eines Funktionsobjektes auf die benötigten Eingabewerte, die zur Berechnung der Ausgabewerte des Objektes benötigt werden. Zusätzlich zur Sub–Liste aggregiert die Klasse **CFFunction** noch zwei weitere Listen, die Parameter–Liste und die Lade–Liste. Die Parameter–Liste verweist auf diejenigen Objekte der Sub–Liste, deren zugehörige Klassen entweder selbst von **ParameterFF** abgeleitet sind, oder die ihrerseits Objekte enthalten, deren Parameter–Liste nicht leer ist. Wenn die Parameter–Liste eines Funktionsobjektes leer bleibt, dann hängen die Ausgabewerte des Objektes nicht von freien Parametern ab und werden daher nur ein einziges Mal berechnet. Die Lade–Liste verweist auf diejenigen Objekte der Sub–Liste, deren zugehörige Klassen von **LFFunction** abgeleitet sind. Die abstrakte Klasse **LFFunction** ist die Basisklasse aller Funktionsklassen, die lad– und speicherbar sind. Lad– und speicherbare Funktionsobjekte werden direkt bei ihrer Erzeugung berechnet. Danach werden die Funktionswerte in eine Datei geschrieben, und der Speicherplatz für die Funktionswerte wird freigegeben. Über die Lade–Liste teilt ein Funktionsobjekt den lad– und speicherbaren Objekten mit, daß das Objekt zur Neuberechnung deren Funktionswerte benötigt. Nach der Neuberechnung kann der Speicherplatz der lad– und speicherbaren Objekte wieder freigegeben werden. Wenn sowohl die Parameter–Liste als auch die Lade–Liste eines Funktionsobjektes nicht leer sind, dann muß dieses Objekt während der Minimierung häufig berechnet werden, da die Parmeter, von denen das Objekt abhängt, variiert werden. In einem solchen Fall teilt ein Funktionsobjekt den lad– und speicherbaren Objekten mit, die Funktionswerte während der gesamten Minimierung nicht mehr in Dateien auszulagern. Von der abstrakten Klasse **LFFunction** werden nur solche Klassen abgeleitet, die symbolische Ausdrücke repräsentieren, die weder selbst noch deren Vorgänger von Parametern abhängen. Die Basisklasse **LFFunction** stellt allgemeine Methoden zur Verfügung, die bei der Generierung von eindeutigen Dateinamen und beim Laden und Abspeichern der Funktionswerte behilflich sind.

Über die abstrakte Basisklasse **ParameterFF** wird mit Hilfe einer Parameterbeschreibung **ParaT** eine Verbindung vom Minimierungspaket zu den Funktionsobjekten hergestellt. In umgekehrter Richtung verbinden die abstrakten Basisklassen für reelle Parameter (**RealPFF**) und komplexe Parameter (**ComplexPFF**) die Funktionsobjekte mit dem Minimierungspaket. Durch diese bidirektionale Verbindung wird sichergestellt, daß externe Minimierungspakete, die ihrerseits die aktuellen Parameterwerte intern speichern, mit den Funktionsobjekten abgeglichen werden können.

Um festzustellen ob zwei Funktionobjekte der gleichen Klasse die gleichen Funktionswerte berechnen, werden nicht die Funktionswerte selbst verglichen. Dies wäre nicht nur Rechenzeit–intensiv, sondern auch gefährlich, da Fließkommazahlen miteinander verglichen werden würden. Stattdessen aggregieren konkrete Funktionsklassen Objekte der symbolischen Repräsentation. So gelten zwei Objekte der Klasse **Mass_LFF** als gleich, wenn die kodierte Kombination der Vierervektoren, aus denen die invariante Masse berechnet werden soll, identisch ist. Für Klassen, die von **ParameterFF** abgeleitet sind, werden die zugehörigen Namen in der Parameterbeschreibung miteinander verglichen. Objekte konkreter Funktionsklassen, für die kein symbolischer „Repräsentant" existiert, zum Beispiel für beliebige Summen oder Produkte aus komplexen Zahlen (**CCsum_CFF**, **CCpro_CFF**), wird überprüft, ob dieselben Funktionsobjekte der Sub–Liste addiert oder multipliziert werden. Zwei Objekte verschiedener Funktionsklassen sind daher niemals gleich, auch wenn sie die gleichen Funktionswerte besitzen.

Die Gewichtsfunktion w ist eine sortierte Liste von Referenzen auf Funktionsobjekte, die im folgenden Amplituden–Liste genannt wird. Zur Neuberechnung der Gewichtsfunktion wird diese Liste abgearbeitet. Dazu wird jedes Element der Liste überprüft, ob es aktualisiert werden muß. Ist dies der Fall, dann wird die Berechnung ausgeführt. Da jedes Funktionsobjekt einmalig ist, und da jedes Objekt ein Zwischenergebnis darstellt, ist die Reihenfolge, in der die einzelnen Objekte in der Amplituden–Liste stehen, außerordentlich wichtig für die Berechnung der Gewichtsfunktion. Das maßgebliche Sortierkriterium ist die Variable „theLevel“ vom Typ **long** in der Klasse **FFunction**. Der Standardwert von „theLevel“ ist eine Eins (niedrigster Wert). Für konkrete Parameterobjekte setzt der Konstruktor der Klasse **ParameterFF** „theLevel“ auf einen großen Wert (z.B. 10.000)[11], da Parameterobjekte keine Sub–Liste besitzen, von der sie abhängen. Bei konkreten Funktionsklassen, die von **CFFunction** abgeleitet sind, wird „theLevel“ vom Konstruktor der Klasse **CFFunction** gesetzt. Dazu wird der größte Wert von „theLevel“ der Objekte in der Sub–Liste benutzt. Das neue Objekt hat dann einen um Eins höheren Wert. Wird die Amplituden–Liste nach ansteigenden Werten von „theLevel“ sortiert, dann ist sichergestellt, daß kein Funktionsobjekt neu berechnet wird, bevor nicht alle Objekte der Sub–Liste berechnet sind.

B.4 Minimierung und Visualisierung

Um die komplizierte Verkettung innerhalb der Funktionsobjekte und die Amplituden–Liste zu erzeugen, wird das Erbauer–Muster [67] verwendet. Der Erbauer **Amplitude** (siehe Klassendiagramm in Abb. B.6) stellt Methoden zur Verfügung, um aus der symbolischen Repräsentation die Gewichtsfunktion zu erzeugen. Für jede konkrete Klasse, die von **LFFunction** oder **ParameterFF** abgeleitet ist, stellt der Erbauer eine Methode zur Verfügung. Diese Methoden folgen alle dem gleichen Schema:

1. Der Rückgabewert der Methoden ist vom Typ **FFunction***, also ein Zeiger auf das zu erbauende (konstruierende) Objekt.

2. Die Übergabewerte an die Methoden sind ein oder mehrere Objekte der symbolischen Repräsentation, die das zu erbauende Funktionsobjekt eindeutig festlegen müssen. So wird zum Beispiel zur Erzeugung eines Produktes aus D–Funktionen ein Objekt benötigt, das alle Indizes der D-Funktionen spezifiziert (**Dpro_base**), und ein weiteres Objekt, das die Argumente der D-Funktionen, also die kombinatorische Kette **Combination_L**, spezifiziert.

3. Anhand der Objekte der symbolischen Repräsentation wird geprüft, ob das zu erbauende Funktionsobjekt bereits existiert. Ist dies der Fall, dann wird ein Zeiger auf das entsprechende Objekt zurückgegeben.

4. Existiert das zu erbauende Funktionsobjekt nicht, dann wird zunächst geprüft, ob das Objekt von anderen Zwischenergebnissen abhängt. Ist dies der Fall, dann werden zunächst diese Objekte erzeugt, das heißt die Erbauer–Methode ruft selbst andere Erbauer–Methoden auf. Für ein neues Produkt aus D–Funktionen (**Dproduct_LFF**) wird daher erst die Erbauer–Methode für die Zerfallswinkel der kombinatorischen Kette (**Angles_LFF**) gerufen. Die Elemente der Sub–Liste des zu erzeugenden Objektes werden danach dem jeweiligen Konstruktor übergeben.

[11] Sollten für eine Anpassung tatsächlich einmal mehr als 9999 verschiedene Level von Funktionsobjekten, die nicht von Parametern abhängen, zu erzeugen sein, dann muß das Programm mit einem höheren Wert neu übersetzt werden.

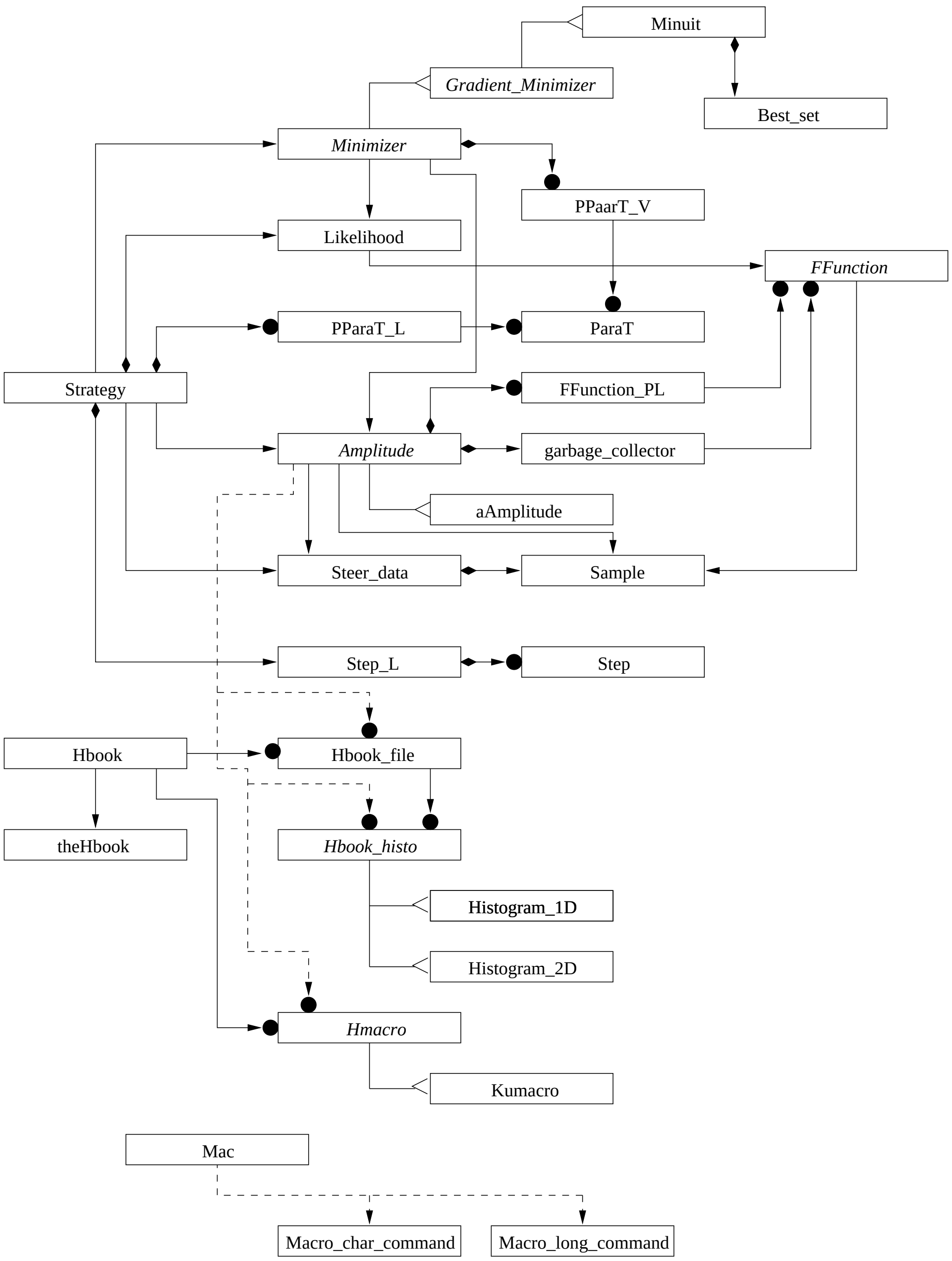

Abbildung B.6: **Klassendiagramm – Minimierung und Visualisierung.**

Für die Verwaltung der Funktionsobjekte ist z. Zt. noch der Erbauer selbst zuständig. In der Klasse **garbage_collector** werden Zeiger auf alle erzeugten Funktionsobjekte gespeichert, über die bei Beendigung des Programms die Objekte gelöscht werden. Das Löschen eines Funktionsobjektes außerhalb des **garbage_collector**–Objektes des Erbauers führt zur Inkonsistenz der Objektverknüpfungen, und spätestens bei Beendigung des Programms zu einem Laufzeitfehler. Mit Hilfe des Erbauer–Musters läßt sich jede beliebige Funktion aus den Funktionsobjekten aufbauen. Jede neue Form der Gewichtsfunkti-

on muß daher im Erbauer implementiert werden. Da zur Zeit nur die Gewichtsfunktion (4.125) implementiert ist, besitzt der Erbauer (**Amplitude**) keine virtuellen Funktionen. Zur Erweiterung des Programms wäre es daher vorteilhaft, diejenigen Erbauer–Methoden als rein virtuelle Funktionen zu deklarieren, die die Gesamtform der Gewichtsfunktion ausmachen. Einige grundlegende Erbauer–Methoden, zum Beispiel diejenigen, die Funktionsobjekte der Klassen erzeugen, die von **LFFunction** abgeleitet sind, könnten als Standard–Implementation in der Erbauer–Basisklasse verbleiben. Dann könnte für jede neue Gesamtform der Gewichtsfunktion ein konkreter Erbauer von **Amplitude** abgeleitet werden, der die gewünschte Form implementiert.
Die zentrale Klasse zur Minimierung und Visualisierung ist die Klasse **Strategy**. Von dieser Klasse wird nach der Erzeugung der symbolischen Repräsentation nur ein Objekt erzeugt, daß mit eben dieser initialisiert wird. Das **Strategy**–Objekt wählt den gewünschten Erbauer aus und veranlaßt ihn zur Erzeugung der Gewichtsfunktion. Aus der Amplituden–Liste werden alle Parameter-Funktionsobjekte herausgesucht und Referenzen auf deren Parameterbeschreibungen gespeichert (**PParaT_L**). Anschließend wird die *Strategiedatei* eingelesen. Dabei wird jeder Minimierungsschritt in ein Objekt der Klasse **Step** konvertiert und in einer Liste **Step_L** gespeichert. Der restliche Programmablauf besteht in der Abarbeitung dieser Liste. Für jeden Minimierungsschritt erzeugt **Startegy** gegebenenfalls ein neues Minimierungsobjekt einer konkreten, von **Minimizer** abgeleiteten Klasse, in der ein externes Minimierungspaket gekapselt ist. Dies kann zum Beispiel ein Objekt der Klasse **Minuit** sein, die ein Interface zum *Fortran*–Programmpaket *MINUIT* darstellt. Außerdem wird ggfs. eine neues Objekt der Klasse **Likelihood** erzeugt, falls die *NLL*–Funktion gewechselt werden soll. Objekte der Klasse **Likelihood** enthalten nur eine Referenz auf ein einziges Funktionsobjekt, nämlich auf das letzte Funktionsobjekt in der Amplituden–Liste. Die Funktionswerte dieses Objektes sind die Gewichte w für jedes Ereignis, die zur Berechnung der *NLL*–Funktion benötigt werden. Danach überprüft das **Strategy**–Objekt, welche der Parameter in diesem Minimierungsschritt freigegeben beziehungsweise fixiert werden sollen, und teilt dies dem Minimierungspaket mit, das die Minimierung der *NLL*–Funktion vornimmt. Ist die Minimierung beendet, dann prüft das **Strategy**–Objekt, ob Histogramme mit den bis dahin gefundenen, besten Parameterwerten, erstellt werden sollen. Das Füllen der Histogramme ist zur Zeit noch Aufgabe der Klasse **Amplitude**. Das Format der Histogramme bestimmt die Klasse **Hbook**, die nach dem Singleton–Muster implementiert ist, das heißt, es kann nur ein einziges Objekt („theHbook") dieser Klasse erzeugt werden. **Hbook** ist ein Interface zur *Fortran*–Programmbibliothek *HBOOK*. Die Möglichkeiten von *HBOOK* wurden um einige sehr angenehme Eigenschaften erweitert. So können problemlos die Histogramme auf beliebig viele Dateien verteilt werden, oder in bequemer Form zugehörige *KUMAC*–Macro–Dateien **Hmacro** erzeugt werden, die in *PAW++* automatisch die richtigen Histogramm–Datein öffnen und die gewünschten Histogramme anzeigen.

B.5 Alphabetische Liste aller Klassen

Die folgende Liste enthält in alphabetischer Reihenfolge alle Klassen, die in den Klassendiagrammen dieses Kapitels gezeigt werden. Hier sollen nur in Stichworten die Aufgaben der einzelnen Klassen erklärt werden. Eine Dokumentation aller Methoden würde den Rahmen dieser Arbeit übersteigen. Die jeweils erste Zeile zu einer Klasse enthält den Namen, Referenzen auf die Klassendiagramme und, wenn es sich lediglich um eine Typdefinition für ein konkretisiertes *Template* handelt, die jeweilige *Template*–Ersetzung.

- **aAmplitude** B.6
  Ein konkreter Amplituden-Erbauer. Die Klasse **Amplitude** ist zur Zeit noch konkret und ist der einzige verfügbare Erbauer.
- **aFormater** B.3
  Eine konkrete **Formater**–Klasse.
- **Alpha** B.1
  Ein partielle Zerfallsamplitude mit Entwicklungen in der Helizitätsdarstellung und der kanonischen Darstellung. Die Klasse speichert zudem partielle Zerfallsamplituden derselben Darstellung die direkt proportional sind und gegebenenfalls eine Entwicklung nach partiellen Zerfallssamplituden in derselben Darstellung.
- **Alpha_Ass** B.4
  Verwaltet die Benutzer–Annahmen bezüglich der partiellen Zerfallsamplituden, das heißt der Zerfälle zu bestimmten λ_1, λ_2, beziehungsweise L, S. Ein Objekt dieser Klasse wird von der Klasse **DecayAmplitude** mit allen erlaubten partiellen Zerfallsamplituden gefüllt.
- **Alpha_Id** B.1, B.4, B.5
  Symbolischer Repräsentant für eine partielle Zerfallsamplitude in der Helizitätsdarstellung oder in der kanonischen Darstellung.
- **Alpha_Id_L** B.1, B.4 **list⟨Alpha_Id⟩**
  Symbolischer Repräsentant für Produkte aus Matrixelementen.
- **Alpha_L** B.1 **list⟨Alpha⟩**
  Liste für alle partiellen Zerfallsamplituden eines Zerfalls.
- **Alpha_ll** B.1
  Je nach Darstellung der symbolische Repräsentant für λ_1, λ_2 oder für L, S.
- **Alpha_TermS** B.1 **pair⟨SSqrt,Alpha_Id⟩**
  Eine partielle Zerfallsamplitude mit einem Vorfaktor.
- **Alpha_TermS_L** B.1 **list⟨Alpha_TermS⟩**
  Eine Linearkombination aus partiellen Zerfallsamplituden.
- **AlphaP** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **ComplexPFF**. Identifikation durch ein Objekt der Klasse **Alpha_Id**. Funktionswert ist der zu einer partiellen Zerfallsamplitude gehörige Parameter.
- **Amplitude** B.6
  Zur Zeit noch konkrete Basisklasse aller Amplituden–Erbauer, deren Aufgabe es ist, die symbolischen Repräsentation (**Initial_States** aus **Steer_data**) der Gewichtsfunktion auf eine berechenbare Repräsentation in der Form einer polymorphen Liste von Funktions–Objekten abzubilden **FFunction_PL**. Der Erbauer stellt Methoden zur Erzeugung einzelner Funktions–Objekte oder der gesamten Gewichtsfunktion bereit. Der Amplituden–Erbauer trennt die Konstruktion der komplexen Funktions–Objekte (Kompositum–Muster) von deren Repräsentation, sodaß derselbe Konstruktionsprozeß unterschiedliche Repräsentationen (Gesamtamplituden, Gewichtsfunktionen) erzeugen kann.
- **Angles_LFF** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **LFFunction** (lad– und speicherbare Klasse). Identifizierung durch **Combination_L**. Funktionswerte sind alle Winkel (siehe Anhang C.8) der gesamten Zerfallskette vom Anfangszustand in den Endzustand.
- **Assumption** B.4
  Singleton–Klasse zur Verwaltung der Benutzer–Annahmen. Die Klasse wird beim Erzeugen der Resonanzen und der Anfangszustände mit allen erlaubten Zerfällen

und partiellen Zerfallsamplituden gefüllt. Methoden zur Abfrage von Benutzer–Annahmen werden bereitgestellt.

- **Best_set** B.6
  Speichert beliebig viele Sätze aller frei variierbaren Parameter der Anpassung zu den aktuell niedrigsten (besten) Werten der *NLL*–Funktion.
- **BlattWeisskopf** B.5
  Stellt Methoden (Funktionszeiger) zur Berechnung der Funktionen B_L zur Verfügung. Siehe dazu Kapitel 4.4.3 und Anhang C.9.
- **BreitWigner_barrier** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **BreitWigner_simple**. Konkrete Basisklasse aller Funktions–Klassen zur Berechnung der Zerfallsdynamik, die zusätzlich von den Aufbruchimpulsen q (berechnet aus den Vierervektoren) abhängen. Die Funktionswerte werden nach Gleichung (C.67) berechnet.
- **BreitWigner_blwk** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **BreitWigner_barrier**. Erweitert die Basisklasse um den Sollaufbruchimpuls q_s, (berechnet aus den Parametern für die Sollmassen). Die Funktionswerte werden nach Gleichung (C.69) berechnet.
- **BreitWigner_CFF** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **CFFunction**. Abstrakte Basisklasse aller Klassen zur Parametrisierung der Zerfallsdynamik. Jede abgeleitete Klasse benutzt die Klassen **Combination**, **MassP** und **WidthP** zur Identifikation. (Die konkreten **BreitWigner_CFF**–Klassen zu den Gleichungen (C.70, C.71) sind hier nicht aufgeführt und auch nicht in den Klassen–Diagrammen gezeigt).
- **BreitWigner_pete** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **BreitWigner_barrier**. Erweitert die Basisklasse um den Sollaufbruchimpuls q_s, (berechnet aus den Parametern für die Sollmassen). Die Funktionswerte werden nach Gleichung (C.68) berechnet.
- **BreitWigner_simple** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **BreitWigner_CFF**. Konkrete Basisklasse aller Funktions–Klassen zur Parametrisierung der Zerfallsdynamik, die von den Sollmassen m_s, Sollbreiten Γ_s und den invarianten Massen m abhängen. Die Funktionswerte werden nach Gleichung (C.68) berechnet.
- **CCdiv_CFF** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **CFFunction**. Die Funktionswerte sind Quotienten komplexer Zahlen.
- **CCpro_CFF** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **CFFunction**. Die Funktionswerte sind Produkte komplexer Zahlen.
- **CCsum_CFF** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **CFFunction**. Die Funktionswerte sind Summen komplexer Zahlen.
- **CFFunktion** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **FFunktion**. Beide Klassen zusammen bilden ein Kompositum. Abstrakte Basisklasse aller Funktions–Klassen, deren Berechnung von vorhergehenden Funktionen abhängt (Sub–Liste). Speichert zusätzlich eine Liste aller Funktionen der Sub–Liste die Parameter enthalten (Parameter-Liste) und eine Liste aller Funktionen der Sub–Liste die nicht permanent im Hauptspeicher gehalten werden (Lade–Liste). Abgeleitete Klassen bieten zumeißt auch noch einen direkten Zugriff auf Funktions–Objekte der Sub–Liste.

- **Chain** B.1 **pair⟨Tbd_Id_L,IsoChain_L⟩**
  Repräsentiert eine vollstaändige Zerfallskette, das heißt es werden für jeden Zerfall in der Kette die Kombinationen mit Teilchenzuordnung gespeichert.
- **Channel_Id** B.1
  Repräsentiert die Zerfallsprodukte (Teilchenidentifikation), deren Helizitäten oder Drehimpuls und Spin eines Zweikörperzerfalls.
- **Charge_fun** B.1
  Stellt in Abhängigkeit von der Multiplizität der geladenen Teilchen des Endzustandes Methoden zur schnellen Berechnung der Gesamtladung einer Kombination aus Endzustands–Teilchen (Vierervektor–Kombination) bereit.
- **Combi** B.1
  Kodierung von Kombinationen aus Teilchen des Endzustandes (Vierervektor-Kombinationen). Wählt eine Methode (Funktionszeiger) der Klasse **Charge_fun** zur Berechnung der Gesamtladung einer Kombination aus.
- **Combination** B.1, B.5
  Kodiert die Kombinatorik eines Zerfalls. Dazu wird die Vierervektor–Kombination des Mutter– und eines Tochterteilchens gespeichert (Damit ist auch die Vierervektor–Kombination des zweiten Tochterteilchens festgelegt).
- **Combination_L** B.1, B.5 **list⟨Combination⟩**
  Speichert die gesamte Kombinatorik einer Zerfallskette.
- **Combinatoric** B.1, B.2
  Erzeugt und speichert die Kombinatorik aller physikalisch erlaubten Zerfallsketten.
- **Command_Line_Options** B.3
  Das einzige Objekt dieser Singleton–Klasse wird als erstes erzeugt, um die Kommandozeilen–Optionen zu speichern. Der Konstruktor der Klasse initialisiert die formatierte Ausgabe (**Formater**) und lenkt dabei gegebenenfalls die globalen Standard–Ausgabeströme **cout**, **clog** und **cerr** in Dateien um.
- **ComplexPFF** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **ParameterFF**. Abstrakte Basisklasse aller Parameter–Funktions–Klassen für komplexe Parameter. Dazu wird die Beschreibung eines komplexen Parameters (**ParaCT**) aggregiert. Unterstüzt die vom Minimierungspaket angeforderte Darstellung der komplexen Zahlen: Entweder Real– und Imaginärteil oder Betrag und Phase.
- **D_base** B.1
  Repräsentiert eine D–Funktion $D^J_{m_1,m_2}$. Das Argument der D–Funktion ist noch nicht festgelegt, da lediglich die drei Indizes gespeichert werden. Bei jeder Erzeugung eines Objektes dieser Klasse wird die statische Variable *maxJ* aktualisiert. In dieser Variablen wird der Wert für den größten benötigten Spin J der Anpassung gespeichert.
- **D_base_L** B.1 **list⟨D_base⟩**
  Hilfsklasse für die symbolische Repräsentation von Produkten aus D-Funktionen.
- **Decay_Ass** B.4
  Kontainer–Klasse die alle Benutzer–Annahmen bezüglich der Zerfälle als Ganzes verwaltet. Wird beim Erzeugen der Resonanzen und Anfangszustände mit allen erlaubten Zerfällen gefüllt.
- **DecayAmplitude** B.1, B.2
  Speichert und erzeugt alle partiellen Zerfallsamplituden und D-Funktionen eines Zerfalles. Es werden Methoden zur Erzeugung von Zerfällen mit oder ohne Paritätserhaltung zur Verfügung gestellt. Falls zu einem Zerfall Sub–Zerfälle (oder

Sub–Zerfallsketten) existieren, dann werden diese in den Zerfall eingesetzt und zur Gesamtzerfallskette ausmultipliziert. Die in der Klasse gespeicherten Ergebnisse repräsentieren Produkte von partiellen Zerfallsamplituden multipliziert mit Summen aus Produkten von D–Funktionen.

- **Dfc** B.1
  Hilfklasse zur Speicherung der Koeffizienten aus Gleichung (C.32) zur Berechnung der d–Funktionen.
- **DFunction** B.1
  Abgeleitet von der Klasse **D_base**. Die Klasse stellt Methoden zur Berechnung der D–Funktionen zur Verfügung.
- **DFunction_V** B.5
  Hilfklasse der Klasse **D_product_LFF** zur Berechnung von Produkten aus D–Funktionen.
- **Dpro_base** B.1, B.5 **pair⟨SSqrt,D_base⟩**
  Repräsentiert ein Produkt von D-Funktionen mit einem zusätzlichen reellen Vorfaktor.
- **Dproduct_LFF** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **LFFunction** (lad– und speicherbare Funktions–Klasse). Zur Identifizierung werden die Klassen **Dpro_base** und **Combination_L** (aus der zugehörigen Winkelfunktion) verwendet. Die Funktionswerte sind Produkte aus D-Funktionen (siehe Anhang C.3).
- **Dsum_base** B.1, B.5 **list⟨Dpro_base⟩**
  Repräsentiert eine Summe aus Produkten von D-Funktionen.
- **Dsum_base_L** B.1 **list⟨Dsum_base⟩**
  Eine Liste die für jede Helizität M eines zerfallenden Zustandes $|JM\rangle$ eine Summe aus Produkten von D-Funktionen speichert.
- **Dsum_LFF** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **LFFunction** (lad– und speicherbar Funktions–Klasse). Zur Identifizierung werden die Klassen **Dsum_base** und **Combination_L** (letztere aus den zugehörigen D-Funktions–Produkten **Dproduct_LFF**). Die Funktionswerte sind Summen aus Produkten von D-Funktionen.
- **FFunction** B.5, B.6
  Abstrakte Basisklasse aller Funktions–Klassen, die zusammen mit der Klasse **CF-Funktion** ein Kompositum bildet. Enthält eine Liste (Top–Liste) von Funktions–Objekten deren Berechnung vom Resultat der aktuellen Funktion abhängt. Jede abgeleitete Klasse stellt mit Hilfe der Klasse **fun_class** sichere, statische Konvertierungsfunktionen („cast"-Operation) zur Verfügung. Dies ist eine Notlösung für Compiler, die noch nicht über die im *ANSI*–Standard vorgesehenen „dynamic_cast"–Operationen verfügen. Jede konkrete abgeleitete Klasse muß, um sicher zu stellen daß Funktions–Objekte einmalig sind, Operatoren (kleiner, größer, gleich und ungleich) für Vergleiche mit Funktions–Objekten derselben Klasse implementieren. Ansonsten wird nur die Hilfsklasse **fun_Id** in Vergleichen verwendet.
- **FFunction_P** B.5
  Nicht gezeigt in den Klassen–Diagrammen. Eine „Smart–Pointer"–Klasse für die Klasse **FFunktion**, die verhindert daß in Vergleichen von Referenzen auf Funktionen nur Adressen verglichen werden. Eine entsprechende Klasse existiert auch als *Template* (**Pointer⟨class A⟩**) für beliebige Zeiger.
- **FFunktion_PL** B.5, B.6 **list⟨FFunction_P⟩**

Eine polymorphe Liste von Funktions–Objekten, zum Beispiel die Sub–Liste, die Top–Liste oder in sortierter Form die Gewichtsfunktion.

- **Formater** B.3
  Basisklasse/Konzept der Formatierungsklassen. Implementiert als Brückenmuster, das heißt die Klasse trennt die Implementierung (**FormaterImplementor**) von der Abstraktion (**aFormater**).
- **Formater_(···)_desc** B.3
  Hilfsklassen für Manipulatoren der formatierten Ausgabe.
- **FormaterImplementor** B.3
  Abstrakte Basisklasse für alle Klassen, die ein bestimmtes Ausgabeformat implementieren. Zur Zeit ist nur LaTeXimplementiert (siehe **TeXFormater**).
- **FourFile** B.3
  Speichert die Pfadnamen und die Anzahl der Vierervektoren in den vom Benutzer bereitgestellten Dateien.
- **FourSample** B.3
  Basisklasse von **Sample**. Entspricht zwei Objekten der Klasse **FourFile**, eines für gemessene Ereignisse und eines für simulierte Ereignisse. Zudem wird der Vierervektor des Anfangszustandes im Laborsystem, sowie die Zuordnung der Endzustands–Teilchen zu Quantenzahlen gespeichert.
- **FourVector** B.3
  Klasse für Vierervektoren. Neben den Operatoren für Summen (+) und Differenzen (−) stellt die Klasse Methoden zur Berechnung von Skalarprodukten, invarianten Massen (C.41), Helizitäts–Rotationen, Beträge, Normen, Lorentztransformationen (C.40) usw. zur Verfügung.
- **FourVector_LFF** B.5
  Abgeleitet von **LFFunction** (lad– und speicherbare Klasse). Ruft Methoden der Klasse **Sample** auf, um verschiedene Dateiformate der Vierervektor–Dateien zu verarbeiten. Die Sub–Liste, die Parameter–Liste und die Lade–Liste (siehe **CFFunction**) sind immer leer, da Funktions–Objekte dieser Klasse keine Vorgänger besitzen. Zur Identifizierung wird die Klasse **Sample** verwendet. Die Funktionswerte sind die Vierervektoren.
- **FullDecayAmplitude** B.2
  pair⟨Combinatoric,DecayAmplitude⟩
  Faßt die partiellen Zerfallsamplituden und die Winkelabhängigkeit eines Zerfalls mit der zugehörigen Kombinatorik zusammen.
- **fun_class** B.5
  Hilfsklasse für sichere *cast*–Operationen auf Funktions–Objekte.
- **fun_Id** B.5
  Hilfsklasse zur eindeutigen Identifizierung von Funktions–Objekten.
- **garbage_collector** B.6
  Eingebettet in der Klasse **Amplitude**. Speichert die Adressen aller jemals vom Funktions–Erzeuger (**Amplitude**) erzeugten Funktions–Objekte. Wird ein/das Objekt dieser Klasse gelöscht, dann werden alle Funktions–Objekte der zugehörigen Gewichtsfunktion gelöscht, das heißt alle Adressen in den Zeigerlisten **FFunction_PL** (Sub–Liste, Top–Liste, ···), sowie in den Parameter–Klassen werden ungültig.
- **Gradient_Minimizer** B.6
  Abgeleitet von **Minimizer**. Abstrakte Basisklasse aller Minimierungsklassen die zur Minimierung der Gewichtsfunktion die Ableitungen nach den freien Parametern benötigen.

- **Hbook** B.6
  Singleton–Klasse (Einziges Objekt: **theHbook**) zur Verwaltung aller Histogramme, Histogramm–Makro–Dateien und Histogramm–Dateien.
- **Hbook_file** B.6
  Eine Histogramm–Datei im *HBOOK*–Format [62].
- **Hbook_histo** B.6
  Abstrakte Basisklasse für beliebige Histogramm–Klassen.
- **Histogram_1D** B.6
  Abgeleitet von der Klasse **Hbook_histo**. Eindimensionale Histogramme im *HBOOK*–Format [62].
- **Histogram_2D** B.6
  Abgeleitet von der Klasse **Hbook_histo**. Zweidimensionale Histogramme im *HBOOK*–Format [62].
- **Hmacro** B.6
  Abstrakte Basisklasse zur Erzeugung von Histogramm–Makro–Dateien zur Visualisierung von Histogrammen.
- **Init_Ass** B.4
  Verwaltet die Benutzer-Annahmen bezüglich der Anfangszustände. Zur Zeit ist dies lediglich der maximal beitragenden Gesamtspin $J_{\max}$.
- **Initial_State** B.2
  Symbolische Repräsentation eines vollständigen Anfangszustandes mit Produktionsamplituden.
- **Initial_State_Description** B.2, B.3
  Speichert eine Beschreibung der zu analysierenden Reaktion.
- **initial_state_Generator** B.2
  Stellt Funktionen zur Generierung der Anfangszustände zur Verfügung.
- **Initial_State_L** B.2 **list⟨Initial_State⟩**
  Speichert alle Anfangszustände.
- **InitialQuanta** B.2
  pair⟨IsoQuantum,Q_Products⟩
  Faßt die Zustände für den Zerfall eines Anfangszustandes in einen einzigen Kanal zusammen.
- **InitialResonance** B.2
  pair⟨InitialQuanta,FullDecayAmplitude⟩
  Pendant zur Klasse **Resonance**, für den Zerfall eines Anfangszustandes in einen einzigen Kanal.
- **InitialResonance_L** B.2 **list⟨InitialResonance⟩**
  Faßt alle Zerfälle eines Anfangszustandes (Kanäle) zusammen.
- **InitialStates** B.2, B.3
  Repräsentiert alle Anfangszustände. Anhand der Beschreibung der Anfangszustände (**Initial_State_Description**) wird die gewünschte Generatorfunktion aus der Basisklasse **initial_state_Generator** ausgewählt.
- **IsoChain** B.1 **pair⟨SSqrt,Combination_L⟩**
  Zerfallskette für die alle Einzelfaktoren (Isospin–Clebsch–Gordan–Koeffizienten) in einem Faktor zusammengefaßt sind.
- **IsoChain_L** B.1 **list⟨IsoChain⟩**
  Faßt mehrere Zerfallsketten in einer Liste zusammen.
- **IsoQuantum** B.2 **pair⟨Sqrt,Quantum⟩**
  Hilfsklasse für Anfangszustände, die eine Mischung aus verschiedenen Isospins sind.

- **IsoQuantum_L** B.2 **list⟨IsoQuantum⟩**
- **Kumacro** B.6
Abgeleitet von der Klasse **Hmacro**. Objekte der Klasse erzeugen Histogramm–Makro–Dateien zur Visualisierung von Histogrammen im *HBOOK*–Format [62]. Diese ermöglichen einen schnellen und bequemen Zugriff (mit *PAW* oder *PAW++* [68, 69]) auf die Histogramme, die sich in unterschiedlichen Histogramm–Dateien befinden können.
- **Lepton_Numbers** B.1
Speichert die Leptonen-Quantenzahlen q_{L_e}, q_{L_μ} und q_{L_τ}.
- **LFFunktion** B.5
Abgeleitet von der Klasse **CFFunktion**. Abstrakte Basisklasse aller Funktions–Klassen, die nur bei Bedarf in den Hauptspeicher geladen werden. Stellt die Implementation der Methoden zum Abspeichern der Funktionswerte in binären Format zur Verfügung.
- **Likelihood** B.6
Stellt die gewünschte Form der zu minimierenden *Likelihood*–Funktion (als Funktionszeiger) zur Verfügung. Besitzt unter anderem Methoden zur Berechnung des Phasenraum–Integrals.
- **long_V** B.3 **vector⟨long⟩**
Ein Vektor ganzer Zahlen.
- **Mac** B.6
Hilfklasse zur Erzeugung von Histogramm–Macro–Dateien **Hmacro**. Stellt statische Methoden bereit zur Realisierung von Stream–Operatoren (<<) für Macros mit mehreren Argumenten. Dazu werden von der Klasse **Mac** temporäre Objekte der Hilfsklassen **Macro_char_command** und **Macro_long_command** erzeugt.
- **Macro_char_command** B.6
Siehe **Mac** .
- **Macro_long_command** B.6
Siehe **Mac**.
- **Mass_LFF** B.5
Abgeleitet von der **LFFunction** (lad– und speicherbare Klasse). Identifizierung durch eine Vierervektor–Kombination (**long**). Die Funktionswerte sind invariante Massen (C.41), die aus den Vierervektoren berechnet werden.
- **MassP** B.5
Abgeleitet von der Klasse **RealPFF**. Identifizierung durch die Klasse **TbD_Id** und den Betrag der Ladung der Resonanz. Der Funktionswert ist eine Sollmasse.
- **Minimizer** B.6
Abstrakte Basisklasse aller Minimierungsklassen, welche die Schnittstelle zu beliebigen Minimierungspaketen definiert.
- **Minuit** B.6
Abgeleitet von der Klasse **Gradient_Minimizer**. Implementiert die Schnittstelle zum Minimierungspaket *MINUIT* [61]. Die Ableitungen der Gewichtsfunktion nach den freien Parametern werden numerisch von *MINUIT* berechnet.
- **ParaCT** B.5
Aggregiert vier Parameter–Beschreibungen (**ParaT**). Die Klasse dient zur Beschreibung des Real– und Imaginärteils, bzw. des Betrages und der Phase, eines komplexen Parameters.
- **ParameterFF** B.5

Abgeleitet von der Klasse **FFunction**. Abstrakte Basisklasse aller Parameter–Funktions–Klassen. Die Klasse definiert die Schnittstelle zur Veränderung der Parameter (**P**araT) und stellt Methoden zur Abfrage des aktuellen Status eines Parameters bereit.

- **ParaT** B.5, B.6
  Speichert alle Informationen über einen einzigen Parameter, zum Beispiel den aktuellen Wert, den Wert bei der Initialisierung, gegebenenfalls Grenzen, den Fit-Status und so weiter. Die Klasse ist für die Aktualisierung der zugehörigen Parameter–Funktion zuständig.
- **PDTable** B.3
  Singleton–Klasse für die *Teilchentabelle*. Im Konstruktor wird die *Teilchentabelle* eingelesen, konvertiert und in einem internen Format abgespeichert.
- **PNTable** B.3
  Singleton–Klasse die für jedes Teilchen in der *Steuerungsdatei* zur Teilchen–Nummer das Schlüsselwort und den LaTeX–Namen aus der *Teilchentabelle* speichert.
- **Pointer** ?? **Pointer⟨class T⟩**
  Nicht gezeigt in den Klassen–Diagrammen. Ein „Smart–Pointer"–Template das verhindert daß in Vergleichen von Referenzen auf Objekte nur Adressen verglichen werden. Siehe auch **FFunction_P**.
- **PParaT_V** B.6 **vector⟨Pointer⟨ParaT⟩⟩**
  Faßt mehrere Zeiger auf Parameter–Beschreibungen in einem Vektor zusammen. Siehe auch unter **FFunction_P**.
- **PParaT_L** B.6 **list⟨Pointer⟨ParaT⟩⟩**
  Faßt mehrere (Zeiger auf) Parameter in einer Liste zusammen. Siehe auch unter **FFunction_P** in Abschnitt B.3.
- **Prod_Id** B.2, B.5
  Repräsentiert Produktionsamplituden. Die Klasse speichert die Gesamthelizität der Reaktionsteilchen $M = \lambda = \lambda_a - \lambda_b$.
- **Prod_Id_L** B.2 **list⟨Prod_Id⟩**
  Eine Liste in der für jede erlaubte Helizität eine Produktionsamplitude gespeichert wird.
- **ProdP** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **ComplexPFF**. Identifizierung durch die Klasse **Prod_Id**. Der Funktionswert ist der zu einer Produktionsamplitude gehörige komplexe Parameter.
- **ProductAmplitude** B.1
  Produkt aus partiellen Zerfallsamplituden für Zerfallsketten mit der zugehörigen Winkelabhängigkeit.
- **ProductAmplitude_L** B.1 **list⟨ProductAmplitude⟩**
  Alle verschiedenen Produkte aus partiellen Zerfallsamplituden mit zugehöriger Winkelabhängigkeit werden in einer solchen Liste zusammengefaßt.
- **Q_Products** B.2, B.3 **pair⟨Quantum,Quantum⟩**
  Speichert beide Zerfallsprodukte eines Zweikörperzerfalls, entspricht zum Beispiel einem Zerfallskanal.
- **Q_Products_L** B.2, B.3 **list⟨Q_Products⟩**
  Eine Liste für mehrere Zerfallskanäle.
- **Q_Resonance** B.3
  pair⟨Quantum,Q_Products⟩
  Hilfsklasse zum Einlesen der Resonanzen aus der *Steuerungsdatei*. Faßt die Zustände

für Mutter– und Tochter–Teilchen zusammen.

- **Q_Resonance_L** B.3 **list⟨Q_Resonance⟩**
  Hilfsklasse zum Abspeichern der Resonanzen aus der *Steuerungsdatei*.
- **Q_ResonanceN** B.3 **pair⟨long_V,Q_Resonance⟩**
  Hilfsklasse zum Einlesen der Resonanzen mit eingeschränkter Kombinatorik aus der *Steuerungsdatei*. Faßt die Zustände für Mutter– und Tochter–Teilchen zusammen und speichert Vierevektor–Nummern.
- **Q_ResonanceN_L** B.3 **list⟨Q_ResonanceN⟩**
  Hilfsklasse zum Abspeichern der Resonanzen mit eingeschränkter Kombinatorik aus der *Steuerungsdatei*.
- **QbreakUp_LFF** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **LFFunction** (lad– und speicherbare Klasse). Identifizierung durch die Klasse **Combination**. Die Funktionswerte sind die Aufbruchimpulse aus Gleichung (C.42), die aus den invarianten Massen berechnet werden.
- **Q0breakUp_CFF** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **CFFunction**. Identifizierung durch drei Parameter für Sollmassen. Der Funktionswert ist der Sollaufbruchimpuls aus Gleichung (C.42, der aus den Sollmassen berechnet wird.
- **Quantum** B.1, B.2, B.3
  Faßt alle Eigenschaften eines Zustandes bzw. Teilchens zusammen. Eine der wichtigsten Klassen der symbolischen Repräsentation.
- **Quantum_Descriptor** B.1
  Speichert die zur Identifizierung benötigte Teilchen–Nummer und gegebenenfalls eine Vierervektor–Kombination.
- **Quantum_L** B.1, B.3 **list⟨Quantum⟩**
  Eine Liste von Zuständen bzw. Teilchen.
- **Quantum_Numbers** B.1
  Speichert alle externe Quantenzahlen: J, P, C, I, G.
- **QuantumN** B.3 **pair⟨long_V,QuantumN⟩**
  Hilfsklasse zum Einlesen der stabilen Teilchen aus der *Steuerungsdatei*. Speichert den Zustand und die zugehörigen Vierervektor–Nummern.
- **QuantumN_L** B.3
  Hilfsklasse zum Abspeichern der stabilen Teilchen aus der *Steuerungsdatei*.
- **Quark_Numbers** B.1
  Speichert die Quark–Quantenzahlen bzw. „Quark–Ladungen“ bezüglich schwerer Quarks: q_S, q_C, q_B und q_T.
- **ratio** B.1
  Gekürzte rationale Zahlen (a/b). Es stehen die Operatoren zur Addition $+$, Subtraktion $-$, Multiplikation $*$ und Division / zur Verfügung.
- **RCabs_CFF** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **CFFunction**. Die Funktionswerte sind Absolutbeträge komplexer Zahlen, welche die Funktionswerte des einzigen Objektes in der Sub–Liste sind.
- **RCnorm_CFF** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **CFFunction**. Die Funktionswerte sind Betragsquadrate komplexer Zahlen, welche die Funktionswerte des einzigen Objektes in der Sub–Liste sind.
- **RealP** B.5

Abgeleitet von der Klasse **RealPFF**. Identifizierung durch den Parameternamen aus der Klasse **ParaT**. Der Funktionswert ist ein beliebiger reeller Parameter.

- **RealP_2** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **RealPFF**. Identifizierung durch den Parameternamen aus der Klasse **ParaT**. Der Funktionswert ist ein beliebiger, quadrierter (nur positive Werte), reeller Parameter.
- **RealPFF** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **ParameterFF**. Abstrakte Basisklasse aller Parameter–Funktions–Klassen mit einem reellen Parameter. Die Klasse aggregiert eine Parameter–Beschreibung (**ParaT**).
- **Recoupling** B.1
  Eine Linearkombination von partiellen Zerfallsamplituden. Terme können durch die Operatoren $+$ und $-$ addiert oder subtrahiert werden. Linearkombinationen können auch mit Hilfe der Operatoren $*$ und / mit einem Faktor multipliziert oder dividiert werden.
- **Resonance** B.1, B.3
  Erzeugt und speichert alle Eigenschaften eines zerfallenden Zustandes. Dazu gehören alle Quantenzahlen, die Kombinatorik und die Zerfallsamplituden.
- **Resonance_L** B.3 **list⟨Resonance⟩**
  Eine Liste für Resonanzen.
- **RRdiv_CFF** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **CFFunction**. Die Funktionswerte sind Quotienten reeller Zahlen.
- **RRpro_CFF** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **CFFunction**. Die Funktionswerte sind Produkte reeller Zahlen.
- **RRsum_CFF** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **CFFunction**. Die Funktionswerte sind Summen reeller Zahlen.
- **Sample** B.3, B.5, B.6
  Abgeleitet von der Klasse **FourSample**. Die Klasse faßt alle bereitgestellten Vierervektoren zusammen und ordnet stabilen Teilchen Quantenzahlen zu.
- **sD_base** B.1 **pair⟨SSqrt,D_base⟩**
  eine D-Funktion mit einem reellen Vorfaktor.
- **sD_base_L** B.1 **list⟨sD_base⟩**
  Hilfsklasse zur Erzeugung von Produkten aus D-Funktionen.
- **Sqrt** B.1, B.2
  Eine Klasse für Wurzeln aus rationalen Zahlen der Form $a_1/b_1 * \sqrt{a_2/b_2}$. Objekte der Klasse können mit den Operatoren $(*)$ und $(/)$ multipliziert oder dividiert werden.
- **Sqrt_L** B.1 **list⟨Sqrt⟩**
  Basisklasse für Summen aus Wurzelausdrücken (**SSqrt**).
- **SSqrt** B.1
  Eine Summe aus Wurzelausdrücken, für die alle mathematischen Operatoren – Summe $(+)$, Differenz $-$, Produkt $*$ und Quotient / – zur Verfügung stehen. Falls das Ergebnis einer Division nicht als Summe von Wurzelausdrücken darstellbar ist, dann wird es zu **double**–Zahl konvertiert.
- **Steer** B.3
  Erzeugt das interne Format der *Steuerungsdatei*. Außerdem erzeugt die Klasse aus der Teilchentabelle **PDTable** die Teilchennamen–Tabelle **PNTable**.

- **Steer_data** B.3, B.6
  Kontainer–Klasse für das interne Format der *Steuerungsdatei*. Wenn alle Daten aus der *Steuerungsdatei* eingelesen sind, erzeugen die Methoden der Klasse die symbolische Repräsentation.
- **Step** B.6
  Beschreibung eines Minimierungsschrittes.
- **Step_L** B.6 **list⟨Step⟩**
  Eine Liste für mehrere Minimierungsschritte.
- **Strategy** B.6
  Wählt den Amplituden–Erbauer aus und veranlaßt diesen die Gewichtsfunktion w zu erzeugen. Anschließend werden alle Minimierungsschritte aus der *Strategiedatei* eingelesen (**Step_L**) und nacheinander ausgeführt. Die Klasse wählt auch das Minimierungspaket aus und erzeugt es.
- **tbd_ass** B.4
  Eine Annahme für einen Zweikörperzerfall.
- **tbd_ass_L** B.4 **list⟨tbd_ass⟩**
  Eine Liste von Annahmen für Zweikörperzerfälle.
- **TbD_Id** B.1, B.4, B.5
  Teilchenidentifikation für einen Zweikörperzerfall. Die Teilchen–Nummern für Mutter– und Tochterteilchen werden aggregiert.
- **TbD_Id_L** B.1, B.4 **list⟨TbD_Id⟩**
  Teilchenidentifikation für eine Zerfallskette.
- **TeX** B.3
  Eine Klasse die zur einfachen Verwendung des Ausgabeoperators << mit mehreren Argumenten nur statische Funktionen (Manipulatoren) enthält.
- **TeXFormater** B.3
  Implementierung des LaTeX-Formats.
- **theHbook** B.6
  Einziges Objekt der Singleton–Klasse **Hbook**.
- **ThreeVector** B.3
  Dreidimensionale Vektoren. Neben den Operatoren zur Addition + und Subtraktion − stehen Methoden zur Berechnung des Skalarproduktes, des Betrages, der Norm usw. zur Verfügung.
- **UCombination** B.1
  Kodierung der Kombinatorik eines Zerfalls (siehe Klasse **Combination**). Außerdem wird ein Symmetrisierungsfaktor (zumeißt ein Isospin–Clebsch–Gordan–Koeffizient) gespeichert.
- **UCombination_L** B.1 **list⟨UCombination⟩**
  Hilfsklasse um das Produkt aus den Symmetrisierungsfaktoren der Klasse **Ucombination** zu berechnen.
- **WidthP** B.5
  Abgeleitet von der Klasse **RealPFF**. Identifizierung durch die Klasse **TbD_Id** und dem Betrag der Ladung der Resonanz. Der Funktionswert ist eine Sollbreite.

Anhang C

Formelsammlung

C.1 Polynome

C.1.1 Legendre–Polynome P_n

Definition:

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_n(x)\, P_m(x) = \delta_{m,n} \tfrac{2}{2n+1} \quad \text{wobei } \mathcal{N} \ni n, m \geq 0 \tag{C.1}$$

Legendre–Polynome genügen der Differentialgleichung:

$$(x^2-1)\frac{d^2}{dx^2} P_n(x) = 2x\frac{d}{dx} P_n(x) - n(n+1) P_n(x) \tag{C.2}$$

Rekursionsbeziehung:

$$(n+1) P_{n+1}(x) = (2n+1) x\, P_n(x) - n P_{n-1}(x) \tag{C.3}$$

Spezielle Werte:

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \quad P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

Expliziter Ausdruck:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{t=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^t \tbinom{n}{t} \tbinom{2n-2t}{n} x^{n-2t} \quad \text{mit } \left[\tfrac{n}{2}\right] = \begin{cases} \frac{n}{2}-1 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{2} & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases} \tag{C.4}$$

C.1.2 Jacobi–Polynome $P_n^{(a,b)}$

Definition:

$$\int_{-1}^{1} dx\, (1-x)^a\, (1+x)^b\, P_n^{(a,b)}(x)\, P_m^{(a,b)}(x) = \delta_{m,n} \tfrac{2^{a+b+1}}{2n+a+b+1} \frac{\Gamma(n+a+1)\Gamma(n+b+1)}{n!\,\Gamma(n+a+b+1)} \tag{C.5}$$

$$\text{wobei } \mathcal{R} \ni a, b > -1 \quad \text{und} \quad \mathcal{N} \ni n, m \geq 0$$

Jacobi–Polynome genügen der Differentialgleichung:

$$(x^2-1)\frac{d^2}{dx^2} P_n^{(a,b)}(x) = [b-a-(a+b+2)x]\frac{d}{dx} P_n^{(a,b)}(x) n(n+a+b+1) P_n^{(a,b)}(x) \tag{C.6}$$

Rekursionsbeziehung:

$$2(n+1)\,(n+a+b+1)\,(2n+a+b)P_{n+1}^{(a,b)}(x) = \left[(2n+a+b+1)\,(a^2-b^2)+(2n+a+b)x\right]P_n^{(a,b)}(x) - 2(n+a)\,(n+b)\,(2n+a+b+2)P_{n-1}^{(a,b)}(x) \quad \text{(C.7)}$$

Spezielle Werte:

$$P_0^{(a,b)}(x) = 1 \qquad P_1^{(a,b)}(x) = \tfrac{1}{2}\left[a-b+(a+b+2)x\right]$$
$$P_n^{(0,0)}(x) = P_n(x) \quad P_n^{(a,b)}(-x) = (-1)^n P_n^{(b,a)}(x)$$

Expliziter Ausdruck:

$$P_n^{(a,b)}(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{t=0}^{n} \tbinom{n+a}{t}\tbinom{n+b}{n-t}(x-1)^{n-t}(x+1)^t \quad \text{(C.8)}$$

C.2 Kugelflächenfunktionen Y_m^l

Definition:

$$\int d\Omega\; Y_{m'}^{l'^*}(\Omega)Y_m^l(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin(\theta)d\theta\; Y_{m'}^{l'^*}(\theta,\phi)Y_m^l(\theta,\phi) = \delta_{l,l'}\;\delta_{m,m'} \quad \text{(C.9)}$$

$$\text{wobei}\quad \mathcal{N} \ni l \geq 0 \qquad \text{und}\quad \mathcal{N} \ni m \quad , \quad -l \leq m \leq l$$

Expliziter Ausdruck:

$$Y_m^l(\theta,\phi) = \sqrt{\tfrac{2l+1}{4\pi}\tfrac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_m^l(\cos\theta)e^{im\phi} \quad \text{(C.10)}$$

Wichtige Beziehungen:

$$Y_{-m}^l(\theta,\phi) = (-1)^m Y_m^{l^*}(\theta,\phi) \quad \text{(C.11)}$$
$$Y_m^l(\pi-\theta,\phi+\pi) = (-1)^l Y_m^l(\theta,\phi) \quad \text{(C.12)}$$

Spezielle Werte:

$$Y_0^l(\theta,\phi) = \sqrt{\tfrac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta) \quad \text{(C.13)}$$

C.2.1 Zugeordnete Legendrefunktionen P_m^l

Definition:

$$P_m^l(x) = \tfrac{(-1)^m}{2^l l!}\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}\left(x^2-1\right)^l \quad \text{(C.14)}$$

$$\text{wobei}\quad \mathcal{N} \ni l \geq 0 \qquad \text{und}\quad \mathcal{N} \ni m \quad , \quad -l \leq m \leq l$$

Die Legendrefunktionen sind bzgl. des Index l orthogonal:

$$\int_{-1}^{1} dx\; P_m^{l'}(x)P_m^l(x) = \tfrac{2}{2l+1}\tfrac{(l+m)!}{(l-m)!)}\delta_{l,l'} \quad \text{(C.15)}$$

Zusammenhang mit Legendre–Polynomen:

$$P_m^l(x) = (-1)^m\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x) \quad \text{für} \quad m \geq 0 \quad \text{(C.16)}$$

Wichtige Beziehungen:

$$P_{-m}^l(x) = (-1)^m\tfrac{(l-m)!}{(l+m)!)}P_m^l(x) \quad \text{(C.17)}$$

C.3 Wignersche D–Funktionen $D^j_{m_1,m_2}$

Die Drehung eines quantenmechanischen Systems bzgl. der drei Eulerwinkel ϕ, θ und ψ wird durch den Rotationsoperator $\hat{R}$

$$\hat{R}(\phi,\theta,\psi) \quad = \quad e^{-\imath\phi\hat{J}_z} e^{-\imath\theta\hat{J}_y} e^{-\imath\psi\hat{J}_z} \tag{C.18}$$

vermittelt. Angewandt auf einen Drehimpuls–Eigenzustand $|jm_2\rangle$ ergibt sich aus der Vollständigkeit der Zustände:

$$\begin{aligned} \hat{R}(\phi,\theta,\psi)|jm_2\rangle &= \sum_{m_1} \langle jm_1|\hat{R}(\phi,\theta,\psi)|jm_2\rangle \ \ |jm_1\rangle & \text{(C.19)} \\ &= \sum_{m_1} D^j_{m_1,m_2}(\phi,\theta,\psi) \ \ |jm_1\rangle & \text{(C.20)} \end{aligned}$$

Die zweite Zeile definiert die Wignersche Drehmatrix, deren Elemente D-Funktionen genannt werden. Häufig wird die Gleichung im umgekehrten Sinne benutzt, denn transformiert sich ein Zustand unter Drehungen gemäß (C.19,C.20), dann ist der Zustand ein Eigenzustand zum Drehimpulsoperator. Damit läßt sich direkt überprüfen, daß die Zweiteilchenzustände in Kapitel 4.1.2.2 tatsächlich Drehimpulseigenzustände sind. Da die Zustände links und rechts des Rotationsoperators ebenfalls Eigenzustände zu $\hat{J}_z$ sind, kann die ϕ– und θ– Abhängigkeit der D–Funktionen trivial bestimmt werden:

$$\begin{aligned} D^j_{m_1,m_2}(\phi,\theta,\psi) &\stackrel{\text{def}}{=} \langle jm_1|\hat{R}(\phi,\theta,\psi)|jm_2\rangle \\ &= e^{-\imath m_1\phi} d^j_{m_1,m_2}(\theta) e^{-\imath m_2\psi} \\ d^j_{m_1,m_2}(\theta) &\stackrel{\text{def}}{=} \langle jm_1|e^{-\imath\theta\hat{J}_y}|jm_2\rangle \end{aligned} \tag{C.21}$$

Eine Drehung bzgl. ψ wird für die Zerfallsketten in Kapitel 4.5 nicht benötigt. Lediglich die Wahl der (ersten) z–Achse des Anfangszustandes in Abb. 4.1 könnte, insbesondere für polarisierte Strahlteilchen a und b, eine Drehung um ψ erfordern. Diese ist jedoch noch nicht implementiert in *TARA*, d.h. lediglich

$$D^j_{m_1,m_2}(\Omega) \quad = \quad D^j_{m_1,m_2}(\phi,\theta,0) = e^{-\imath m_1\phi} d^j_{m_1,m_2}(\theta) \tag{C.22}$$

kann berechnet werden. Die Funktionen $d^j_{m_1,m_2}(\theta)$ haben folgende Symmetrieeigenschaften:

$$\begin{aligned} d^j_{m_1,m_2}(\theta) &= d^j_{m_2,m_1}(-\theta) & \text{(C.23)} \\ d^j_{m_1,m_2}(\theta) &= (-1)^{m_1-m_2} d^j_{-m_1,-m_2}(\theta) & \text{(C.24)} \\ d^j_{m_1,m_2}(\pi-\theta) &= (-1)^{j+m_1} d^j_{m_1,m_2}(\theta) & \text{(C.25)} \\ d^j_{m_1,m_2}(\pi) &= (-1)^{j-m_2} \delta_{m_1,-m_2} & \text{(C.26)} \end{aligned}$$

Aus (C.23) und (C.24) folgt, daß die Kenntnis der d-Funktionen zu $m_1 \geq m_2 \geq 0$ ausreicht um alle d-Funktionen berechnen zu können. Einen expliziten Ausdruck für die d-Funktionen liefert die Wigner-Formel (siehe z.B. [70]):

$$\begin{aligned} d^j_{m_1,m_2}(\theta) &= \sum_t (-1)^t \frac{\sqrt{(j+m_1)!\,(j-m_1)!\,(j+m_2)!\,(j-m_2)!}}{(j+m_1-t)!\,(j-m_2-t)!\,t!\,(t-(m1-m2))!} \\ &\quad \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)^{2(J-t)+(m_1-m_2)} \sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)^{2t-(m_1-m_2)} \end{aligned} \tag{C.27}$$

Dabei ist t ganzahlig, und es werden nur Summanden berücksichtigt, für die die Fakultäten einen Sinn haben ($0! = 1$). Die Wigner–Formel kann mit Hilfe der Jacobi–Polynome ohne Beschränkung der Allgemeinheit für $m_1 \geq m_2 \geq 0$ umgeschrieben werden zu:

$$\begin{aligned} d^j_{m_1,m_2}(\theta) &= (-1)^{m_1-m_2}\sqrt{\frac{(j-m_2)!\,(j+m_1)!}{(j+m_2)!\,(j-m_1)!}}\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)^{m_1+m_2}\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)^{m_1-m_2} \\ & \quad P^{(m_1-m_2,m_1+m_2)}_{j-m_1}(\cos(\theta)) \end{aligned} \tag{C.28}$$

Aus (C.28) folgt, daß für geradzahliges j die d–Funktionen ein Polynom in $\cos(\theta)$ und $\sin(\theta)$ sind. Denn für $m_1 - m_2 \geq 0$ gerade, können die Sinus– und Cosinus–Terme vor dem Jacobi–Polynom gemäß

$$\sin^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos(\theta)}{2} \tag{C.29}$$

$$\cos^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right) = \frac{1+\cos(\theta)}{2} \tag{C.30}$$

umgeformt werden. Für $m_1 - m_2 \geq 1$ ungerade, kann ein Term gemäß

$$\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin(\theta)}{2} \tag{C.31}$$

und die restlichen Terme gemäß (C.29, C.30) umgeschrieben werden. *TARA* verwendet zur Zeit den für das Programm *tps* [29] entwickelten d–Funktions–Generator für geradzahligen Spin. Der Generator speichert bei der Initialisierung die Vorfaktoren f und die Exponenten a, b, c für jedes t in der Summe der Wigner-Formel (C.27), sodaß für jedes t ein Polynom der Form

$$f\;(1+cos(\theta))^a(1-cos(\theta))^b\sin^c(\theta) \tag{C.32}$$

gespeichert wird. Der Funktionsaufruf zur Berechnung der D–Funktionen erfordert daher die Kentnis von $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$, $\cos(\phi)$ und $\sin(\phi)$:

$$D^{j\,*}_{m_1,m_2}\big(\cos(\theta),\sin(\theta),\cos(\phi),\sin(\phi)\big) = d^j_{m_1,m_2}\big(\cos(\theta),\sin(\theta)\big)\cdot\big(\cos(\phi)+\imath\sin(\phi)\big)^{-m} \tag{C.33}$$

Mit Hilfe der zu *TARA* gehörenden, aber noch nicht verwendeten, Polynomklasse, kann das Programm leicht, mit Hilfe von (C.28), auf halbzahligen Spin erweitert werden. Dann müssen jedoch zusätzlich alle sich auf D–Funktionen beziehenden Funktionsaufrufe um die Argumente $\cos(\theta/2)$ und $\sin(\theta/2)$ erweitert werden.

C.4 Clebsch–Gordan–Koeffizienten $(j_1m_1j_2m_2|jm)$

TARA benutzt zur Zeit die CERN–Programm–Bibliothek–Routine *clebs*. Sollte diese nicht (oder nicht mehr) zur Verfügung stehen, dann kann eine zu *TARA* gehörende Implementierung zur Berechnung verwendet werden, die folgende Formel in Ganzzahl-Arithmetik auswertet:

$$\begin{aligned} (j_1m_1j_2m_2|jm) &= \delta_{m,m_1+m_2}\sqrt{\frac{(j_1+j_2-j)!\,(j+j_1-j_2)!\,(j+j_2-j_1)!\,(2j+1)}{(j+j_1+j_2+1)!}} \\ & \quad \sum_t(-1)^t\frac{\sqrt{(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1)!\,(j_2+m_2)!\,(j_2-m_2)!\,(j+m)!\,(j-m)!}}{t!\,(j_1+j_2-j-t)!\,(j_1-m_1-t)!\,(j_2+m_2-t)!\,(j-j_2+m_1+t)!\,(j-j_1-m_2+t)!} \end{aligned} \tag{C.34}$$

Aus den Symmetrieeigenschaften der Clebsch–Gordan–Koeffizienten ergeben sich folgende Beziehungen:

$$(j_1m_1j_2m_2|jm) = (-1)^{j_1+j_2-j}(j_2m_2j_1m_1|jm) \tag{C.35}$$

$$= (-1)^{j_1+m_2-j}\sqrt{\frac{2j+1}{2j_1+1}}(jmj_2-m_2|j_1m_1) \tag{C.36}$$

$$= (-1)^{j_2-m_1-j}\sqrt{\frac{2j+1}{2j_2+1}}(j_1-m_1jm|j_2m_2) \tag{C.37}$$

$$= (-1)^{j_1+j_2-j}(j_1-m_1j_2-m_2|j-m) \tag{C.38}$$

C.5 Lorentz–Transformation $\tilde{L}(\tilde{p})$

Lorentz–Transformationen werden im Zusammenhang mit Zerfällen (siehe Kapitel 4.2) benötigt, um in das Ruhesystem einer Resonanz (z.B. s und t in Abb. 4.1) oder des Anfangszustandes J zu transformieren. In jedem Fall ist daher eine Ruhemasse m_r mit dem Vierervektor $\tilde{p}_r$, bzgl. dessen transformiert wird, verknüpft. Sei also ein solches „massebehaftetes“ Referenzsystem Σ gegeben, das sich aus der Sicht eines anderen Bezugssystem Σ' mit der Geschwindigkeit $\vec{\beta}$ bewegt.

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{p}_r}{E_r} \tag{C.39}$$

Die Lorentz–Transformation eines beliebigen Vierervektors $\tilde{p}$ von Σ nach Σ' ist dann gegeben durch:

$$\tilde{p}' = \begin{pmatrix} E' \\ \vec{p}' \end{pmatrix} = \tilde{L}(\tilde{p}_r)\tilde{p} = \tilde{L}(\tilde{p}_r)\begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_r}(EE_r - \vec{p}\vec{p}_r) \\ \vec{p} + \frac{\vec{p}_r}{m_r}\left(\frac{\vec{p}\vec{p}_r}{E_r+m_r} - E\right) \end{pmatrix} \tag{C.40}$$

Wie sich leicht nachprüfen läßt, gilt insbesondere:

$$\tilde{p}_r{}' = \tilde{L}(\tilde{p}_r)\tilde{p}_r = \begin{pmatrix} m_r \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

TARA geht davon aus, daß die zur Verfügung stehenden Vierervektoren der (gemessenen) Teilchen im Endzustand sich auf das Laborsystem beziehen, d.h. Σ ist das Laborsystem und Σ' das Ruhesystem eines zerfallenden Zustandes.

C.6 Invariante Masse m

Die invariante Masse ist ein Lorentzskalar und hat damit, wie das Adjektiv im Namen bereits zum Ausdruck bringt, denselben Wert in allen Bezugssystemen. Wird eine Resonanz durch die Zerfallsprodukte nachgewiesen, so ist die invariante Masse der Resonanz die Norm aus der Summe der gemessenen Vierervektoren ($\tilde{p}_i$):

$$m = \sqrt{\left|\sum_{i=1}^{n}\tilde{p}_i\right|^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i\right)^2} \tag{C.41}$$

C.7 Aufbruchimpulse p_s, p_s^0

Der Betrag des Aufbruchimpulses p_s der Tochterteilchen (s_1, s_2) einer Resonanz s im Ruhesystem von s kann allein durch die invarianten Massen der drei Teilchen ausgedrückt werden:

$$p_s = \frac{\sqrt{\left[m_s^2 - (m_{s_1}^2 + m_{s_2}^2)^2\right]\left[m_s^2 - (m_{s_1}^2 - m_{s_2}^2)^2\right]}}{2m_s} \tag{C.42}$$

Zur Berechnung des Sollaufbruchimpulses p_s^0 müssen in (C.42) die invarianten Massen lediglich durch die Sollmassen (m_s^0, $m_{s_1}^0$, $m_{s_2}^0$) der Teilchen ersetzt werden.

C.8 Zerfallswinkel Ω_ι^σ

Die für die D–Funktionen im Helizitätsformalismus benötigten Zerfallswinkel $(\theta_\iota^\sigma, \phi_\iota^\sigma) = \Omega_\iota^\sigma$ im Ruhesystem der Resonanz ι, bzgl. der vorherigen Flugrichtung von ι (z_ι-Achse) werden wie folgt berechnet: Zunächst werden die Vierervektoren der zum Zustand ι und σ gehörenden Teilchen im Endzustand aufaddiert. Dies ergibt die Vierervektoren im Laborsystem $\tilde{p}_\iota^{\mathrm{lab}}$ und $\tilde{p}_\sigma^{\mathrm{lab}}$. Diese Situation ist dargestellt in Abb.C.1.a. Im Allgemeinen zeigt die Flugrichtung des zerfallenden Zustandes ι nicht in Richtung der z-Achse, sondern bildet mit ihr einen Winkel[1] $\Omega_\iota^{\mathrm{lab}}$. Da die Helizität λ_ι von ι bzgl. der Flugrichtung von ι definiert ist, müssen die Vektoren $\vec{p}_\iota^{\,\mathrm{lab}}$ und $\vec{p}_\sigma^{\,\mathrm{lab}}$ im Laborsystem um $(-\Omega_\iota^{\mathrm{lab}})$ gedreht werden. Die Energiekomponente der Vierervektoren ist dabei invariant. Dafür werden die Ausdrücke

$$\cos(\theta_\iota^{\mathrm{lab}}) = \frac{p_{z,\iota}^{\mathrm{lab}}}{p_\iota^{\mathrm{lab}}} = \frac{p_{z,\iota}^{\mathrm{lab}}}{\sqrt{{p_{x,\iota}^{\mathrm{lab}}}^2 + {p_{y,\iota}^{\mathrm{lab}}}^2 + {p_{z,\iota}^{\mathrm{lab}}}^2}} \tag{C.43}$$

$$\sin(\theta_\iota^{\mathrm{lab}}) = +\sqrt{1 - \cos^2(\theta_\iota^{\mathrm{lab}})} \tag{C.44}$$

$$\cos(\phi_\iota^{\mathrm{lab}}) = \frac{p_{x,\iota}^{\mathrm{lab}}}{p_{T,\iota}^{\mathrm{lab}}} = \frac{p_{x\ \iota}^{\mathrm{lab}}}{\sqrt{{p_{x,\iota}^{\mathrm{lab}}}^2 + {p_{y,\iota}^{\mathrm{lab}}}^2}} \tag{C.45}$$

$$\sin(\phi_\iota^{\mathrm{lab}}) = \frac{p_{y,\iota}^{\mathrm{lab}}}{p_{T,\iota}^{\mathrm{lab}}} = \frac{p_{y,\iota}^{\mathrm{lab}}}{\sqrt{{p_{x,\iota}^{\mathrm{lab}}}^2 + {p_{y,\iota}^{\mathrm{lab}}}^2}} \tag{C.46}$$

benötigt. Die explizite Formel für die gedrehten Vektoren $\vec{p}_\iota^{\,\mathrm{rot}}$ und $\vec{p}_\sigma^{\,\mathrm{rot}}$ (vgl. Abb.C.1.b) lautet dann:

$$\vec{p}^{\,\mathrm{rot}} = \begin{pmatrix} p_x^{\mathrm{rot}} \\ p_y^{\mathrm{rot}} \\ p_z^{\mathrm{rot}} \end{pmatrix} = \hat{R}\,(-\theta_\iota^{\mathrm{lab}}, -\phi_\iota^{\mathrm{lab}}, 0)\,\vec{p}^{\,\mathrm{lab}} \tag{C.47}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_\iota^{\mathrm{lab}})\cos(\phi_\iota^{\mathrm{lab}}) & \cos(\theta_\iota^{\mathrm{lab}})\sin(\phi_\iota^{\mathrm{lab}}) & -\sin(\theta_\iota^{\mathrm{lab}}) \\ \sin(\phi_\iota^{\mathrm{lab}}) & \cos(\phi_\iota^{\mathrm{lab}}) & 0 \\ \sin(\theta_\iota^{\mathrm{lab}})\cos(\phi_\iota^{\mathrm{lab}}) & \sin(\theta_\iota^{\mathrm{lab}})\sin(\phi_\iota^{\mathrm{lab}}) & \cos(\theta_\iota^{\mathrm{lab}}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x^{\mathrm{lab}} \\ p_y^{\mathrm{lab}} \\ p_z^{\mathrm{lab}} \end{pmatrix}$$

Zuletzt wird der gedrehte Vierervektor $\tilde{p}_\sigma^{\mathrm{rot}}$ ins Ruhesystem von ι, mit der z_ι-Achse entlang der alten Flugrichtung, unter Verwendung von (C.40) Lorentz–transformiert.

$$\tilde{p}_\sigma = \tilde{L}(\tilde{p}_\iota^{\mathrm{rot}})\tilde{p}_\sigma^{\mathrm{rot}} = \tilde{L}_{z_\iota}(\tilde{p}_\iota)\tilde{p}_\sigma^{\mathrm{rot}} \tag{C.48}$$

[1]Dieser Winkel darf keinesfalls mit den zu berechnenden Winkeln Ω_ι^σ verwechselt werden. $\Omega_\iota^{\mathrm{lab}}$ wird für die Amplitude nicht benötigt.

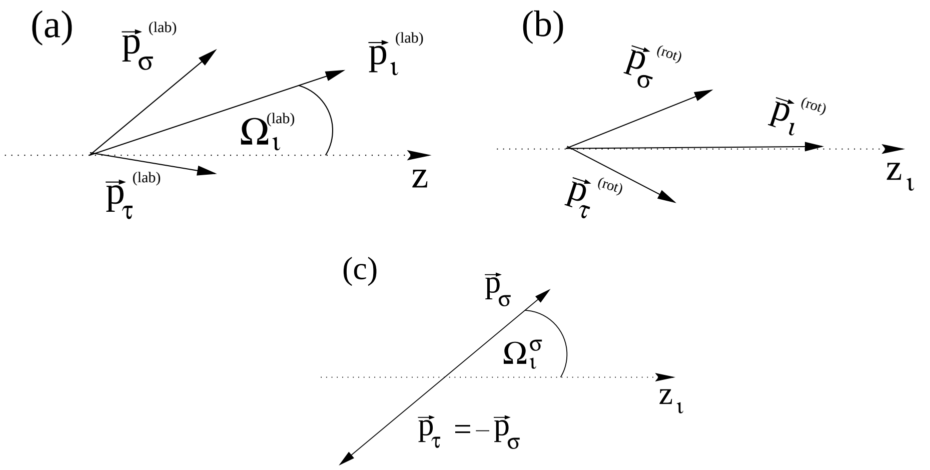

Abbildung C.1: **Berechnung der Zerfallswinkel** $\Omega_\iota^\sigma = (\theta_\iota^\sigma, \phi_\iota^\sigma)$.
Zur besseren Übersicht ist auch das rückstreuende Teilchen τ eingetragen.
(a) Das Laborsystem – die z–Achse zeigt i.A. nicht in Flugichtung des zerfallenden Zustandes ι.
(b) Das rotierte Koordinatensystem – die z_ι-Achse zeigt in Flugrichtung des zerfallenden Zustandes ι.
(c) Das Ruhesystem des zerfallenden Zustandes ι.

Das Ergebnis zeigt Abb.C.1.c. In diesem System werden die für die Zerfallsamplitude benötigten Winkel Ω_ι^σ berechnet. Es sind diese Ruhesysteme, die in Abb.4.1 durch Kreise angedeutet werden. Da in Abb.4.1 die z–Achse der Strahlachse entspricht, zeigt der Impulsvektor des Anfangszustandes $|JM\rangle$ bereits in Richtung der z-Achse. Zur Berechnung des Winkels Ω_J^s muß daher um 0° bzw. gar nicht gedreht werden. Für die Berechnung der D–Funktionen, werden z.Zt. nur die Sinus– und Cosinus–Funktionen der Winkel gebraucht[2]. Diese werden genau wie die Drehwinkel berechnet berechnet:

$$\cos(\theta_\iota^\sigma) = \frac{p_z^\sigma}{p_\sigma^\sigma} = \frac{p_z^\sigma}{\sqrt{p_x^{\sigma 2} + p_y^{\sigma 2} + p_z^{\sigma 2}}} \tag{C.49}$$

$$\sin(\theta_\iota^\sigma) = +\sqrt{1 - \cos^2(\theta_\iota^\sigma)} \tag{C.50}$$

$$\cos(\phi_\iota^\sigma) = \frac{p_x^\sigma}{p_T^\sigma} = \frac{p_x^\sigma}{\sqrt{p_x^{\sigma 2} + p_y^{\sigma 2}}} \tag{C.51}$$

$$\sin(\phi_\iota^\sigma) = \frac{p_y^\sigma}{p_T^\sigma} = \frac{p_y^\sigma}{\sqrt{p_x^{\sigma 2} + p_y^{\sigma 2}}} \tag{C.52}$$

[2] Wenn *TARA* auf halbzahligen Spin erweitert werden soll, dann werden auch die Sinus– und Cosinus–Funktionen zu den halben Winkel benötigt. Um diese aus (C.49 – C.52) zu berechnen, sind viele Fallunterscheidungen nötig.

C.9 Blatt–Weisskopf–Faktoren

Quigg und Hippel [55] leiten die Funktionen B_L aus der Streuung an einem Kastenpotential ab, wie es auch die Namensgeber Blatt und Weisskopf [71] für niedrige Energien in der Kernphysik taten. Dabei wird davon ausgegangen, daß ab einem gewissen Radius R die Wechselwirkung zwischen den Tochterteilchen der Resonanz scharf auf Null abfällt. Der Radialteil der Schrödinger Gleichung außerhalb des Wechselwirkungsradius R enthält dann nur noch einen Term, der proportional zu $L(L+1)/r^2$ ist. Dieser Term wird wegen seiner Ähnlichkeit mit einer Rotationsenergie Zentrifugalbarriere gennant. Die Lösungen der Schrödinger Gleichung für $r > R$ sind proportional zu den sphärischen Besselfunktionen. Das Quadrat der unten angegebenen Funkionen $D_L(p) = D_L(p/p_R)$ entspricht in diesem Zusammenhang formal dem Transmissionskoeffizienten für die Zentrifugalbarriere. Dabei wird der Wechselwirkungsradius R durch einen Impuls p_R ausgedrückt, der eigentlich als freier Parameter in die Analysen eingehen müßte. Allerdings hat sich in vielen früheren Analysen gezeigt, daß ein Wert von $p_R = 200$ MeV/c, was $R \approx 1$ fm entspricht, die Linienform von Mesonen gut beschreibt. p_R könnte ohne großen Aufwand als freier Parameter in *TARA* implementiert werden.

C.9.1 Sphärische Besselfunktionen $\left|h_L^{(1)}\right|^2$

Die sphärischen Besselfunktionen erster Art (j_L), zweiter Art (y_L) und dritter Art ($h_L^{(1)}$, $h_L^{(2)}$) zu jedem $L = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ sind linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung:

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} f(x) + 2x \frac{d}{dx} f(x) + [x^2 - L(L+1)] f(x) \quad = \quad 0 \tag{C.53}$$

Die sphärischen Besselfunktionen dritter Art (h_L) setzen sich aus den Funktionen erster und zweiter Art zusammen.

$$h_L^{(1)}(x) = j_L(x) + i y_L(x) \quad \text{und} \quad h_L^{(2)}(x) = j_L(x) - i y_L(x) \tag{C.54}$$

Für die Berechnung der Barriere–Faktoren wird nur der Absolutbetrag der Funktionen $\left|h_L^{(1)}(x)\right|^2$ benötigt, für den es folgenden expliziten Ausdruck gibt:

$$\left|h_L^{(1)}(x)\right|^2 \quad = \quad \sum_{t=0}^{L} 2^{2(t-L)} \tbinom{2L-t}{t} \tbinom{2L-2t}{L-t} (2L-2t)! x^{2(t-L)} \tag{C.55}$$

C.9.2 Definition der Funktionen $D_L(p)$

Die oben erwähnten „Wurzeln aus dem Transmissionskoeffizienten“ $D_L(p)$ sind wie folgt definiert:

$$D_L(p) \quad = \quad D_L\left(x = \frac{p}{p_R}\right) = \sqrt{\frac{\left|h_L^{(1)}(x=1)\right|^2}{x^2 \left|h_L^{(1)}(x)\right|^2}} \tag{C.56}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{t=0}^{L} 2^{2(t-L)} \tbinom{2L-t}{t} \tbinom{2L-2t}{L-t} (2L-2t)!}{\sum_{t=0}^{L} 2^{2(t-L)} \tbinom{2L-t}{t} \tbinom{2L-2t}{L-t} (2L-2t)! \; x^{2(t-L-1)}}} \tag{C.57}$$

Die Funktionen D_L sind so normiert, daß

$$D_L(p) \underset{p \to p_R}{\longrightarrow} 1 \tag{C.58}$$

gilt. Wird aus dem Nenner von C.57 x^{-2L} faktorisiert, dann läßt sich das in Kapitel 4.4.3 geforderte Verhalten an der Schwelle ablesen:

$$D_L(p) \propto p^L \text{ für } p \to 0 \tag{C.59}$$

Die D_L–Funktionen sind für $L \leq 6$ fest in der Klasse **BlattWeisskopf** einprogrammiert. Die Klasse kann jedoch, mit Hilfe der Polynomklassen jederzeit auf beliebiges L erweitert werden. Die ersten fünf D_L–Funktionen lauten explizit:

$$D_0(x) = 1 \tag{C.60}$$

$$D_1(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+1}} \tag{C.61}$$

$$D_2(x) = \sqrt{\frac{13x^2}{(x-3)^2+9x}} \tag{C.62}$$

$$D_3(x) = \sqrt{\frac{277x^3}{x(x-15.)^2+9(2x-5)^2}} \tag{C.63}$$

$$D_4(x) = \sqrt{\frac{998881x^5}{\left(\{[(x+15)x+315)]x+6300\}x+99225\right)x+893025}} \tag{C.64}$$

C.9.3 Definition der Funktionen $B_L(p, p_0)$

Die Funktion D_L werden analog zu den Kopplungen g_α (4.110) und den beobachteten Partialbreiten (4.113) auf die Sollwerte (in den invarianten Massen) normiert. Dies ergibt die Definition der Blatt-Weisskopf-Faktoren, wie sie von *TARA* verwendet werden:

$$B_L(p, p_0) = \frac{D_L(p)}{D_L(p_0)} \tag{C.65}$$

C.10 Parametrisierung der dynamischen Funktionen Δ

TARA bietet entsprechend den verschiedenen, in Kapitel 4.4 diskutierten, Ansätzen mehrere dynamische Funktionen für den Zerfall von Resonanzen an.

C.10.1 Einfache Breit–Wigner–Form $\Delta(m_0, m, \Gamma_0)$

Die einfachste Breit–Wigner–Form läßt Schwelleneffekte und Linienform außer Acht.

$$\Delta(m_0, m, \Gamma_0) = \frac{m_0\Gamma_0}{m_0^2 - m^2 - im_0\Gamma_0} \tag{C.66}$$

C.10.2 Breit–Wigner–Form $\Delta_L(m_0, m, \Gamma_0, p)$

Die einfachste Breit–Wigner–Form mit Barriere–Faktor sollte nur in Gewichtsfunktionen verwendet werden, bei denen die Dynamik aus den Betragsquadraten faktorisiert werden kann, da diese Form die Barrierefaktoren unskaliert läßt. Da dies bei der Berücksichtigung von Produktionsamplituden nie der Fall ist, kam diese Form bei den vorgestellten Analysen auch nicht zum Einsatz.

$$\Delta(m_0, m, \Gamma_0, p) = \frac{m_0\Gamma_0 B_L(p^2)}{m_0^2 - m^2 - im_0\Gamma_0} \tag{C.67}$$

C.10.3 Breit–Wigner–Form aus dem F-Vektor Ansatz $\Delta_L(m_0, m, \Gamma_0, p, p_0)$

Dies ist die Form, die für alle in dieser Arbeit vorgestellten Analysen benutzt wurde.

$$\Delta(m_0, m, \Gamma_0, p, p_0) = \frac{m_0 \Gamma_0 B_L(p^2, p_0^2)}{m_0^2 - m^2 - i m_0 \Gamma_0 B_L^2(p^2, p_0^2)/\rho} \tag{C.68}$$

C.10.4 Andere Breit–Wigner–Formen $\Delta_L(m_0, m, \Gamma_0, p, p_0)$

Der Vollständigkeit halber werden hier alle weiteren dynamischen Funktionen, die *TARA* anbietet, aufgelistet.

$$\Delta(m_0, m, \Gamma_0, p)) = \frac{m_0 \Gamma_0 B_L(p)}{m_0^2 - m^2 - i m_0 \Gamma_0 B_L^2(p, p_0)\rho/\rho_0} \tag{C.69}$$

$$\text{oder} = \frac{m_0 \Gamma_0 B_L(p, p_0)/\rho_0}{m_0^2 - m^2 - i m_0 \Gamma_0 B_L^2(p, p_0)\rho/\rho_0} \tag{C.70}$$

$$\text{oder} = \frac{m_0 \Gamma_0 B_L(p^2, p_0^2)/\rho_0}{m_0^2 - m^2 - i m_0 \Gamma_0 B_L^2(p, p_0)\rho/\rho_0} \tag{C.71}$$

Abbildungsverzeichnis

1.1 $SU(3)_{Flavor}$–Nonett . . . 6
1.2 Mesonenspektrum . . . 7

2.1 Protonen–Antiprotonen–Beschleuniger–Komplex des *CERN* . . . 11
2.2 Crystal Barrel Detektorsystem . . . 12
2.3 Wasserstofftarget . . . 13
2.4 Silizium–Vertexzähler (*SVTX*) . . . 14
2.5 Jet–Driftkammer (JDC) . . . 14
2.6 Kristallmodul des Kalorimeters . . . 16

3.1 Annihilationsvertex . . . 20
3.2 Energieverlustspektren . . . 22
3.3 E_{lab} vs. $|\vec{p}_{\mathrm{lab}}|$ für $C^+C^-2\gamma$-Ereignisse . . . 23
3.4 Masse der geladenen Teilchen $m_{C^\pm}$ für $C^+C^-\gamma^2$–Ereignisse . . . 24
3.5 Unterdrückung von Schauerfluktuationen . . . 26
3.6 *TAXI*–Methode . . . 28
3.7 Unterdrückung von Schauerfluktuationen ($C^+C^-\gamma^{n_\gamma}$-Ereignisse) . . . 29
3.8 Dalitzplot und invariante Massen – $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV}/c)\,p \to \eta\eta\pi^0$ . . . 31
3.9 Dalitzplot und invariante Masse – $\bar{p}\,(600\,\mathrm{MeV}/c)\,p \to \pi^0\pi^0\pi^0$ . . . 33
3.10 $K^\pm/\pi^\pm$-Separation für $C^+C^-2\gamma$–Ereignisse . . . 36
3.11 Untergrund in den $K^+K^-\pi^0/\pi^+\pi^-\pi^0$–Daten . . . 37
3.12 Symmetrisierter Dalitzplot – $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV}/c)\,p \to K^+K^-\pi^0$ . . . 38

4.1 Produktion und Zerfall eines Zustandes J . . . 42
4.2 Bezugssysteme . . . 43

5.1 Produktions– und Zerfallswinkel – $\bar{p}\,(600\,\mathrm{MeV}/c)\,p \to \pi^0\pi^0\pi^0$ . . . 83
5.2 Dalitzplot und invariante $\pi^0\pi^0$–Masse der Anpassung – $\bar{p}\,(600\,\mathrm{MeV}/c)\,p \to \pi^0\pi^0\pi^0$ . . . 84
5.3 Dalitzplot und invariante Massen der Anpassung – $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV}/c)\,p \to \eta\eta\pi^0$ 90
5.4 Produktionswinkel der Resonanzen – $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV}/c)\,p \to \eta\eta\pi^0$ . . . 91
5.5 Zerfallswinkel der Resonanzen – $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV}/c)\,p \to \eta\eta\pi^0$ . . . 92
5.6 Produktionswinkel der $K\pi$-Resonanzen – $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV}/c)\,p \to K^+K^-\pi^0$ . . . 96
5.7 Produktionswinkel der K^+K^--Resonanzen – $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV}/c)\,p \to K^+K^-\pi^0$. 97
5.8 Zerfallswinkel der $K\pi$-Resonanzen – $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV}/c)\,p \to K^+K^-\pi^0$ . . . 98
5.9 Zerfallswinkel der K^+K^--Resonanzen – $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV}/c)\,p \to K^+K^-\pi^0$ . . . 99
5.10 Dalitzplot (nicht symmetrisiert) und invariante Massen der Anpassung – $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV}/c)\,p \to K^+K^-\pi^0$ . . . 102

B.1 Klassendiagramm – Resonanzen und Teilchen . . . 126

B.2 Klassendiagramm – Anfangszustände 127
B.3 Klassendiagramm – Steuerung 128
B.4 Klassendiagramm – Annahmen 130
B.5 Klassendiagramm – Funktionen 132
B.6 Klassendiagramm – Minimierung und Visualisierung 135

C.1 Berechnung der Zerfallswinkel $\Omega = (\theta, \phi)$ 155

Tabellenverzeichnis

1.1 Grundbausteine der Materie . . . 1
1.2 Additive Quantenzahlen der Quarks und Leptonen . . . 3
1.3 Einteilung der Mesonen nach additiven Quantenzahlen . . . 4
1.4 Nomenklatur für Baryonen . . . 5
1.5 Nomenklatur für Mesonen aus $SU(3)_{Flavor}$–Nonetts . . . 6

2.1 Triggerhierarchie . . . 17

3.1 Programmbibliotheken . . . 19
3.2 Skalierungsfaktoren der Meßfehler für 6γ-Ereignisse . . . 29
3.3 Zuordnung der 6γ-Ereignisse zu „mesonischen" Endzuständen . . . 30
3.4 Rekonstruktionseffizienzen und Fehlzuordnungsraten für den 6γ–Endzustand 30
3.5 Fehlzuordnungsraten von Endzuständen mit anderen Photon–Multiplizitäten zu 6γ–Endzuständen . . . 32
3.6 Vorselektion der $(C^+C^-)^{n_c}\gamma^{n_\gamma}$–Ereignisse . . . 33
3.7 Aufspaltung nach Photonmultiplizitäten der $(C^+C^-)^{n_c}\gamma^{n_\gamma}$–Ereignisse . . . 34
3.8 Aufspaltung nach „mesonischen" Endzuständen der $(C^+C^-)^{n_c}\gamma^{n_\gamma}$-Ereignisse 34
3.9 Selektionskriterien für $C^+C^-\gamma^{n_\gamma}$–Ereignisse . . . 35
3.10 Rekonstruktionseffizienzen und Fehlzuordnungsraten für $C^+C^-2\gamma$-Endzustände . . . 37

4.1 Fermion–Antifermion–Anfangszustände . . . 65
4.2 Anzahl der komplexen Parameter für $\bar{p}p \to X + 0^-$ . . . 76

5.1 Massen und Breiten – $\bar{p}\,(600\,\mathrm{MeV/}c)\,p \to \pi^0\pi^0\pi^0$ . . . 82
5.2 Beiträge der partiellen Zerfallsamplituden der $\bar{p}p$–Anfangszustände – $\bar{p}\,(600\,\mathrm{MeV/}c)\,p \to \pi^0\pi^0\pi^0$ . . . 82
5.3 Massen und Breiten einer früheren Analyse – $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV/}c)\,p \to \eta\eta\pi^0$ . . . 86
5.4 Ausgewählte Anpassungen – $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV/}c)\,p \to \eta\eta\pi^0$ . . . 87
5.5 Beiträge der partiellen Zerfallsamplituden der $\bar{p}p$–Anfangszustände – $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV/}c)\,p \to \eta\eta\pi^0$ . . . 88
5.6 Massen und Breiten – $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV/}c)\,p \to \eta\eta\pi^0$ . . . 89
5.7 Anpassungen mit verschiedenen Spins in der K^+K^-–Massenregion 1700 MeV/c^2 – $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV/}c)\,p \to K^+K^-\pi^0$ . . . 94
5.8 Beiträge der partiellen Zerfallsamplituden der $\bar{p}p$–Anfangszustände – $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV/}c)\,p \to K^+K^-\pi^0$ . . . 95
5.9 Signifikanz der Resonanzen . . . 100
5.10 Massen und Breiten – $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV/}c)\,p \to K^+K^-\pi^0$ . . . 101

A.1 Teilchentabelle . . . 108

A.2 *Steuerungsdatei* – $\bar{p}\,(1940\,\mathrm{MeV/}c)\,p \to \eta\eta\pi^0$ 109
A.3 *Particle*–Block 110
A.4 *Stable2Body*–Block und *Stable3Body*–Block 111
A.5 *Resonances*–Block 111
A.6 „Dynamik"–Schlüsselwörter 112
A.7 *Fix2toResonance*–Block 112
A.8 *Fix3toResonance*–Block 113
A.9 *Channel*–Block 113
A.10 *InitialState*–Block 114
A.11 *Assumptions*–Block 115
A.12 *Datasamples*–Block 116
A.13 *Paths*–Block 117
A.14 *Step*–Block 118
A.15 Parameter–Gruppen– und Histogram–Schlüsselwörter für den *Step*–Block . 119
A.16 Beispiel für eine *Strategiedatei* 120

B.1 Kombinationen und kombinatorische Ketten 125

Literaturverzeichnis

[1] K. Peters, *Suche nach gebundenen gluonischen QCD-Systemen*, Habilitationsschrift, Universität Bochum (1996)

[2] A. Abele et al., Crystal Barrel–Kollaboration, Phys. Lett. B**333**(1994)277

[3] S. U. Chung, Proc. LEAP' 98

[4] J. Z. Bai et al., Phys. Rev. Lett. **77**(1996)3959

[5] R. M. Baltrusaitis et al., Phys. Rev. D**35**(1987)2077

[6] C. Amsler und F. Close, Phys. Lett. B**353**(1995)385

[7] G.G.Harigel, *Experiments at CERN 1991*, CERN 1991

[8] E. Aker et al., Crystal Barrel–Kollaboration, *The Cryst al Barrel Spectrometer at LEAR with a 4π neutral and charged Detector*, Proposal, CERN/PSCC/85-86, Oktober 1985

[9] E. Aker et al., Crystal Barrel–Kollaboration, Nucl. Instr. Meth. A**321**(1992)69

[10] C. Regenfus, Nucl. Instr. Meth. A**386**(1997)60

[11] R. Bossingham, *The Jet Drift Chamber (JDC), Geometry, Construction Matrials and general Characteristics*, Crystal Barrel Internal Note 130, unveröffentlicht

[12] C. A. Meyer, *r–Φ Calibration of the JDC*, Crystal Barrel Internal Note 143, unveröffentlicht

[13] C. A. Meyer, *z Calibration of the JDC*, Crystal Barrel Internal Note 124, unveröffentlicht

[14] J. Friedrichs, *Bau und Test eines Lichtpulsersystems für das Crystal Barrel Experiment*, Diplomarbeit, Universität Hamburg (1989), unveröffentlicht

[15] I. Augustin, *Verfahren zur Eichung des Crystal Barrel Kalorimeters*, Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (1990), unveröffentlicht

[16] W. Schott, *Das $CsI(Tl)$ Kalorimeter des Crystal Barrel Detektors*, Dissertation, Universität Karlsruhe (1989)

[17] M. A. Kunze, *Aufbau und Test eines Triggersystems für das Crystal Barrel Experiment*, Dissertation, Universität Karlsruhe (1990)

[18] K. Braune, *The Fast Cluster Encounter*, Crystal Barrel Internal Note 41, unveröffentlicht

[19] G. Folger, *Offline Reconstruction Software*, Crystal Barrel Internal Note 121, unveröffentlicht

[20] C.A. Meyer, *Chamber Reconstruction Software*, Crystal Barrel Internal Note 93, unveröffentlicht

[21] F. H. Heinsius, *Crystal Data Reconstruction Software*, Crystal Barrel Internal Note 92, unveröffentlicht

[22] M. Burchell, *Global Tracking Particle Bank Structure*, Crystal Barrel Internal Note 118, unveröffentlicht

[23] P. Hidas, *Kinematic Fitting Software*, Crystal Barrel Internal Note 138, unveröffentlicht

[24] R. Bossingham, *Monte–Carlo Software*, Crystal Barrel Internal Note 169, unveröffentlicht

[25] GEANT, CERN Program Library Entry W5013

[26] T. F. Degener, M. A. Kunze, J. Lüdemann und K. Peters, *Object Oriented Offline Analysis for C++ Programmers*, Crystal Barrel Internal Note 169, unveröffentlicht

[27] T. F. Degener, *Untersuchung elektromagnetischer Schauer im Crystal Barrel Kalorimeter mit künstlichen neuronalen Netzen*, Diplomarbeit, Universität Bochum (1993), unveröffentlicht

[28] T. F. Degener, *A Feed Forward Neural Network for Recognition of Fluctuations in Electromagnetic Showers*, New Computing Techniques in Physics Research III, World Scientific, Singapore (1994)

[29] J. Lüdemann, *Beobachtung von Resonanzen in der Proton–Antiproton–Annihilation im Fluge in drei pseudoskalare Mesonen*, Dissertation, Universität Bochum (1995)

[30] H. Stöck, *Erkennung geladener Spuren in einer Driftkammer mittels der Radon Transformation*, Diplomarbeit, Universität Bochum (1994), unveröffentlicht

[31] G. Großmann, *Computersimulation zur Trennung geladener Pionen und Kaonen mit dem Crystal Barrel Detektorsystem*, Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (1989), unveröffentlicht

[32] J. Salk, *Analyse des 5γ-Endzustandes in der Proton–Antiproton–Annihilation in Ruhe*, Diplomarbeit, Universität Bochum (1992), unveröffentlicht

[33] N. Hessey, *DOLBY C*, Crystal Barrel Internal Note 98, unveröffentlicht

[34] M. Benayoun et al., *Split–Off recognition in data with charged tracks. The TAXI logics*, Crystal Barrel Internal Note 280, unveröffentlicht

[35] R. Behrlich, *Visualisierung hadronischer Split-Offs und ihre Erkennung mit neuronalen Netzen*, Diplomarbeit, Universität Bochum (1995), unveröffentlicht

[36] C. A. Meyer, *User Guide for CBDROP. A charged Splitoff Supression Package*, Crystal Barrel Internal Note 191, unveröffentlicht

[37] T. F. Degener, *Application of a Neural Network and a Genetic Algorithm in the Analysis of Multi Particle Final States* Int. Jour. of Mod. Phys. C**6**, No. 4(1995)599

[38] H. Stöck, *Analyse von Dreiteilchen Endzuständen in der Proton–Antiproton–Annihilation*, Dissertation, Universität Bochum (1998)

[39] M. Ratajczak, *Untersuchung geladener Endzustände der Antiproton–Proton–Annihilation im Fluge in drei pseudoskalare Mesonen*, Diplomarbeit, Universität Bochum (1996), unveröffentlicht

[40] T. F. Degener, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)**56A**(1997)204

[41] M. Jacob und G. C. Wick, Ann. Phys. 7(1959)404

[42] S. U. Chung, *Spin Formalism*, CERN 71-8 (1971)

[43] C. Bourrely, E. Leader und J. Soffer, Phys. Lett. 59 No.2(1980)95

[44] D. Haidt et al., Eur. Phys. J. C**3**(1998)1

[45] S. U. Chung, *C– and G–parity: A new Definition and Applications*, BNL preprint, BNL-QGS-95-02 (1996)

[46] M. Faessler, *Light Mesons with open and hidden Strangeness*, Hadron Spectroscopy and the Confinement Problem, ed. by D. V. Bugg, NATO ASI Series B: Physics Vol.353, Plenum Press, 1996

[47] C. Völkcker, *Untersuchung von* $\bar{K}K\pi$*–Endzuständen in Proton–Antiproton–Annihilationen*, Dissertation, Universität München (1997)

[48] G. F. Wolters, *Kinematics and Multiparticle Systems*, ed. by M. Nikolic, Gordon and Breach, New York (1968)230

[49] I. J. R. Aitchison, Nucl. Phys. A**189**(1972)417

[50] H. Burkhardt, *Dispersion Relation Dynamics*, North–Holland, Amsterdam (1969)

[51] H. Pilkuhn, *The Interactions of Hadrons*, North–Holland, Amsterdam, (1967)

[52] S. Godfrey und N. Isgur, Phys. Rev. D**32**(1985)189

[53] C. Hong–Mo und T.S. Tsun, Phys. Rev. D4**1971**(156)

[54] H. Goldberg, Phys. Rev. Lett. B**158**(1968)778

[55] F. von Hippel und C. Quigg, Phys. Rev. D**5**(1972)624

[56] C. Amsler et al., Crystal Barrel–Kollaboration, Phys. Lett. B**333**(1994)277

[57] C. Amsler et al., Crystal Barrel–Kollaboration, Phys. Lett. B**291**(1992)347

[58] C. Amsler et al., Crystal Barrel–Kollaboration, Phys. Lett. B**353**(1995)571

[59] K. Beuchert, *Untersuchungen zur* $\bar{p}p$ *Annihilation im Fluge am Crystal Barrel Detektor*, Dissertation, Universität Bochum (1995)

[60] Mathematica, *User guide*

[61] MINUIT, *Reference Manual*, Version 92.1, CERN, Genf (1992)

[62] HBOOK, *Reference Manual*, Version 4.14, CERN, Genf (1992)

[63] CERN Computer Centre Program Library, CERN, Genf (1988)

[64] N. Josuttis, *Die C++ –Standardbibliothek*, Addison–Wesley (1996)

[65] D. R. Musser und A. Saini, *STL Tutorial and Reference Guide*, Addison–Wesley (1996)

[66] J. Rumbaugh, M. Blaha, W. Premerlani, F. Eddy und W. Lorenson, *Object–Oriented Modeling and Design*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ (1991)

[67] E. Gamma, R. Helm, R. Johnson und J. Vlissides, *Design Patterns*, Addison–Wesley (1995)

[68] PAW, *Physics Analysis Workstation*, Version 1.07, CERN, Genf (1989)

[69] PAW++, *Physics Analysis Workstation*, Version 2.02, CERN, Genf (1993)

[70] A. Messiah, *Quantum mechanics Vol.2*, North–Holland Publishing Co., Amsterdam (1962)

[71] J. Blatt, V. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, John Wiley & Sons (1952)

[72] S. Brandt, *Datenanalyse*, BI-Wiss.–Verl. (1992), 3.Auflage

[73] R. Glantz, *Untersuchungen zur Richtungsrekonstruktion für Photonen im Crystal Barrel Kalorimeter*, Diplomarbeit, Universität Hamburg (1992), unveröffentlicht

Glossar

$A^J_{L,S}$	Partielle Zerfallsamplitude zum relativen Bahndrehimpuls L, Spin S und Gesamtdrehimpuls J in der kanonischen Darstellung.
a	Primärteilchen der Reaktion, Name und Spin des Projektils.
	B_n Baryonenzahl von Teilchen n.
b	Primärteilchen der Reaktion, Name und Spin des Targets.
$\hat{C}$	Operator der Ladungskunjugation, C-Parität Operator.
C_n	C-Parität von Teilchen n.
C^0	C-Parität der neutralen Mesonen ohne Strangeness in einem Meson–Nonett.
$c^{s,t}_{I_J,I_{3_J}}$	Kurzform für Isospin–Clebsch–Gordan–Koeffizienten.
$D^J_{m,n}$	Wignersche D-Funktion, siehe Anhang C.3.
$d^J_{m,n}$	Azimuth-Abhängigkeit der Wignerschen D-Funktion, siehe Anhang C.3.
$\hat{E}$	Einsoperator, Identität.
$\overrightarrow{e_n}$	Einheitsvektor in Richtung der n-Achse.
$f(C,G)$	Kurzform für $f(C,G,q_{Y_s},q_{Y_t})$.
$f(C,G,q_{Y_s},q_{Y_t})$	Von den Hyperladungen abhängiger Faktor, der zur Symmetriesierung der Zweiteilchenzustände in einem Zweiteilchenzustand mit Gesamtdrehimpuls J, Gesamtisospin I und definierter C– und G–Paität benötigt wird, wenn beide Teilchen Strangeness besitzen. In allen anderen Fällen ist $f(C,G)$ identisch Eins.
$F(C,G)$	Produkt aus mehreren Faktoren $f(C,G)$, das entsteht, wenn in einer Zerfallskette mehrere Zweikörperzerfälle vorkommen, in denen beide Zerfallsprodukte Strangeness besitzen.
F_n	„Intrinsischer“ Flavor von Teilchen n, wird benötigt um die Definition von C^0 auf alle Mesonen eines Nonetts zu erweitern.
$\hat{G}$	G-Paritäts–Operator.
G_n	G-Parität von Teilchen n.
$\hat{I}$, $\hat{I}_3$, $\hat{I}_\pm$	Isospin–Operatoren: Gesamtisospin, dritte Komponente, Auf– und Absteigeoperator.
I_n, I_{3n}	Isospin und dritte Komponente des Isospins von Teilchen n.
J	Gesamtdrehimpuls, z.B. in Abb.4.1 des aus a und b gebildeten Anfangszustandes.

j	Gesamtdrehimpuls, beziehungsweise Spin eines Einteilchenzustandes.
L	Relativer Bahndrehimpuls. In Abb.4.1 und in der Definition der kanonischen Zweiteilchenzustände, der relative Bahndrehimpuls von s und t im Ruhesytem von J. Kurzform für $L_{i,j}$.
$L_{i,j}$	Relativer Bahndrehimpuls zwischen Teilchen i und Teilchen j.
$L_{a,b}$	Relativer Bahndrehimpuls der Primärteilchen a und b im Scherpunktsystem der Reaktion, d.h. Ruhesystem von J.
L_n	Relativer Bahndrehimpuls der Zerfallsprodukte von Teilchen n, z.B. der relative Bahndrehimpuls L_s von Teilchen s_1 und s_2 im Ruhesystem des Mutterteilchens s.
$\tilde{L}[\tilde{p}]$	Lorentztransformation mit $\tilde{p}$.
$\tilde{L}_z[\tilde{p}]$	Lorentztransformation entlang einer/der $z - Achse$ mit $\tilde{p}$.
	L_e, L_μ, L_τ Leptonenzahlen. Elektronische–, Muonische–, Tauonische–Leptonzahl.
M	Projektion des Gesamtdrehimpulses J auf die z-Achse. In der Situation von Abb.4.1 ist M auch gleichzeitig die Helizität von J, d.h. $M = \lambda_a - \lambda_b$.
m	Invariante Masse oder Projektion eines Spins auf die z-Achse.
m_n	In Bezug auf Spins: Projektion des Spins von Teilchen n auf die z-Achse im kanonischen Formalismus. In Bezug auf die Dynamik: Invariante Masse von Teilchen n, die aus den gemessenen Vierervektoren $m_n = \|\tilde{p}_n\|$ berechnet wird, siehe (C.41).
m_n^0	Ruhemasse bzw. Sollmasse von Teilchen n.
$\hat{M}$	Ein (unbekannter) Zerfallsoperator.
N_J	Normierungsfaktor für Helizitäts-Zweiteilchenzustände mit Gesamtspin J.
$\hat{O}$	Ein Operator (ggfs. mit Eigenwert O).
$\tilde{p}$	Ein Viererimpuls.
$\tilde{p}_n$	Viererimpuls von Teilchen n.
$\vec{p}$	Dreierimpuls eines Teilchens. Wenn nicht anders angegeben ist dies der sogenannte Aufbruchimpuls, d.h. der Impuls eines Zerfallsproduktes im Ruhesystem des Mutterteilchens. In Kugelkoordinaten: $\vec{p} = p_r\vec{e_r} + p_\theta\vec{e_\theta} + p_\phi\vec{e_\phi}$.
p	Impulsbetrag, $p = \|\vec{p}\|$, Kurzform für p_r.
Q_n	Elektrische Ladung von Teilchen n.
q_U , q_D	„Leichte“ Quarkflavor-Quantenzahlen: Upness q_U und Downness q_D.
q_S , q_T , q_C , q_B	„Schwere“ Quarkflavor-Quantenzahlen: Strangeness q_S, Charmeness q_C, Bottomness q_B und Topness q_T.
$\hat{R}$	Ein Drehoperator.
$\hat{R}_I$	Ein Drehoperator im Isospinraum.

S	Gesamtspin zweier Teilchen, bzgl. Abb.4.1 und in der Definition der kanonischen Zweiteilchenzustände $S = s \oplus t$.
$S_{a,b}$	Gesamtspin der Primärteilchen, $S_{a,b} = a \oplus b$.
S_n	Gesamtspin der Zerfalsprodukte eines Mutterteilchens n, z.B. $S_s = s_1 \oplus s_2$.
$s\,,\ t$	Namen und Spins der Zerfallssprodukte eines Zustandes J.
$s_1\,,\ s_2$	Namen und Spins der Zerfallssprodukte von Teilchen s.
$t_1\,,\ t_2$	Namen und Spins der Zerfallssprodukte von Teilchen t.
	Y_n, q_{Y_n} Hyperladung von Teilchen n, wobei $q_{Y_n} = Y_n/2$
$Y^L_{m_L}$	Kugelflächenfunktion, siehe Anhang C.2.
$(j_1 m_1 j_2 m_2 \vert JM)$	Clebsch Gordan Koeffizient für die Kopplung der Drehimpulse j_1 und j_2 zum Gesamtdrehimpuls J, $J = j_1 \oplus j_2$.
$\alpha^J_{\lambda_s,\lambda_t}$	Partielle Zerfallsamplitude in der Helizitäts-Darstellung zum Gesamtdrehimpuls J und zu den Helizitäten λ_s und λ_t.
κ	Normierungsfaktor für Zweiteilchenzustände.
λ	Eine Helizität.
λ_n	Helizität von Teilchen n, positiv in Flugrichtung von n.
ϕ	Polarwinkel, Winkel zur x-Achse in der x-y-Ebene, Kurzform für p_ϕ.
ϕ^i_j	Polarwinkel von Teilchen i im Ruhesystem von Teilchen j.
θ	Azimuth, Winkel zu einer z-Achse, Kurzform für p_θ.
θ^i_j	Azimuth von Teilchen i im Ruhesystem von Teilchen j.
Ω	Raumwinkel, Kurzform für (θ, ϕ).
Ω^i_j	Raumwinkel (Richtung des Impulses) von Teilchen i im Ruhesystem von Teilchen j.
$d\Omega$	Raumwinkeldifferential, $d\Omega = d(\cos\theta) d\phi$.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich all denen danken, die mir bei der Anfertigung meiner Dissertation mit Rat und Tat zur Seite standen.

Zuerst gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. H. Koch für das Vertrauen, das er mir entgegengebracht hat, seine zuverlässige Unterstützung und sein reges Interesse am Fortgang der Arbeit.
Herrn Prof. U. Wiedner möchte ich dafür danken, daß er mich bei der Koordination der Datennahme im September 1995 unterstützt hat.
Ohne die Hilfe von Herrn Dipl. Phys. U. Kurilla und Herrn Dipl. Phys. M. Ratajczak wäre ich wohl an der langwierigen Selektion der Daten verzweifelt.
Herrn Prof. S. U. Chung möchte ich für die Diskussionen über den Formalismus danken.
Herr HD Dr. K. Peters hat den größten Anteil daran, daß ich mir einbilde, Prof. Chungs Ratschläge verstanden zu haben.
Herrn HD Dr. M. Kunze und Herrn Dr. J. Lüdemann möchte ich dafür danken, daß sie mich frühzeitig davon überzeugt haben, in C++ objektorientiert zu programmieren. Ohne sie wäre mein Partialwellenprogramm deutlich bescheidener ausgefallen.
Herrn Prof. Dr. K. Efetov und seiner Gruppe danke ich dafür, daß ich deren Rechner für meine Analysen benutzen durfte.

Mein ganz besonderer Dank gilt meinem Vater, der mir das Studium der Physik ermöglicht hat sowie meiner Frau Tanja und meiner Tochter Tara Catharina für die Liebe und den großen Rückhalt, den sie mir geben.

Lebenslauf

Name:	Thomas Friedrich Degener
Geburtsdatum:	1. August 1966
Geburtsort:	Essen
Staatsangehörigkeit:	deutsch
Familienstand:	verheiratet, ein Kind

Schulausbildung

1972–1976 Johann Peter Hebel Grundschule in Essen–Überruhr.

1976–1985 Gymnasium Essen-Überruhr, Allgemeine Hochschulreife.

Wehrdienst

10/85–12/86 3. Luftwaffenausbildungsregiment 5, Essen-Kupferdreh,
1. Flugabwehrraketenbataillon 35, Dörverden,Verden–Aller.

Studium

10/86–09/89 Studium der Physik an der Ruhr–Universität Bochum.

10/89–10/90 Auslandsstudium an der University of Sussex in Falmer, Brighton, England.

11/90–01/92 Studium der Physik an der Ruhr–Universität Bochum.

02/92–08/93 Anfertigung der Diplomarbeit mit dem Thema: Untersuchung elektromagnetischer Schauer im Crystal Barrel Kalorimeter mit künstlichen neuronalen Netzen.

seit 09/93 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Experimentalphysik I der Ruhr–Universität Bochum bei Prof. H. Koch, verbunden mit regelmäßigen Aufenthalten am CERN (Genf) und Teilnahme an nationalen und internationalen Konferenzen sowie der Anfertigung der Dissertationsschrift.